Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Métodos de Pontos Interiores Aplicados à Basis Pursuit

Aurelio Ribeiro Leite de Oliveira, **Paula Aparecida Kikuchi**,
Departamento de Matemática Aplicada, IMECC, Unicamp,
13083-859, Campinas, SP
E-mail: aurelio@ime.unicamp.br, paulapkikuchi@gmail.com,

Daniela Renata Cantane
Departamento de Bioestatística, Instituto de Biociências, Unesp
Campus de Botucatu
18618-970, Botucatu, SP
E-mail: dcantane@ibb.unesp.br.

Resumo: *Vários são os métodos propostos para reconstrução de sinal. Nosso enfoque é o método Basis Pursuit. Trabalhando com dicionários overcomplete, são inúmeras as combinações possíveis para a representação do sinal e Basis Pursuit encontra a mais esparsa. Veremos que podemos reescrever o problema em questão como um problema de programação linear. Apresentaremos um método já existente para a resolução deste problema, o Método Primal-Dual Barreira Logarítmica. Vamos aplicar o Método Barreira Logarítmica, e buscando maior eficiência, iremos incluir a direção afim-escala, a direção de centragem e a direção de correção no mesmo método, obtendo o Método Primal-Dual Barreira Logarítmica Preditor-Corretor. Resultados computacionais com problemas reais comprovam a eficiência do método proposto.*

Palavras-chave: *representação de sinais, esparsidade, programação linear, método de barreira, método preditor-corretor*

1 Introdução

Dado um sinal, podemos decompô-lo como combinação linear de certos elementos [1], para tanto, vamos definir certos conceitos.

Definimos dicionário como uma coleção de *waveforms* parametrizadas $D = (\phi_\gamma : \gamma \in \Gamma)$, sendo *waveforms* ϕ_γ sinais discretos de tempo chamados átomos, que nesse trabalho será visto como um vetor pertencente a $\mathbb{R}^n$. Representação de sinais por meio de dicionários é uma alternativa que surge, além das representações usuais que utilizam superposição de senóides, como mencionado em [4].

Consideramos um sinal s sendo um vetor pertencente a $\mathbb{R}^n$, sua decomposição em um dicionário é dada por $s = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma \phi_\gamma$. Considere que temos um dicionário discreto de p *waveforms* e uma matriz Φ cujas colunas correspondem às p *waveforms* ($\Phi : n \times p$), podemos reescrever s como $\Phi\alpha = s$, onde $\alpha = (\alpha_\gamma)$ é o vetor dos coeficientes da representação anterior.

Veja que, se as *waveforms* são linearmente independentes, teremos uma matriz Φ não singular, sendo que se as *waveforms* forem ortonormais $\Phi^{-1} = \Phi^T$.

Dicionários são definidos como completos quando possuem n átomos, *overcomplete* quando possuem mais que n átomos, ou *undercomplete* quando possuem menos de n átomos.

Note que se trabalhamos com um dicionário completo, s terá uma representação única. Já quando fazemos uso de dicionários *overcomplete*, sua representação não será única (teremos átomos que são combinações lineares de outros), permitindo que escolhamos a que nos for mais conveniente. Como um dos objetivos que queremos alcançar nas representações de sinais é esparsidade (obter o menor número de coeficientes significativos), já podemos ter em mente que uma boa ideia seria minimizar $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\alpha_\gamma|$.

Não são poucos os métodos propostos para representar sinais em dicionários *overcomplete*. Alguns exemplos, descritos em [3] são: *método de frames* (MOF), que escolhe a representação cujos coeficientes tenham a norma 2 mínima, *matching pursuit* (MP), *the best orthogonal basis* (BOB) e *basis pursuit* (BP). Diferentemente do *método de frames*, BP irá escolher a representação cujos coeficientes tenham a norma 1 mínima. Chamamos essa decomposição do sinal de superposição "ótima" de elementos do dicionário. Chen, Donoho e Saunders [4] mostram várias vantagens de BP sobre MOF, MP e BOB, dentre elas, esparsidade.

Note que BP baseia-se na resolução do seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \|\alpha\|_1 \\ \text{sujeito a} & \Phi\alpha = s \end{array} . \tag{1}$$

Sendo que podemos reformulá-lo por meio de um programa linear na forma padrão [8].

Resolveremos o problema linear na forma padrão, equivalente a (1), por meio do método de pontos interiores, que será o enfoque desse trabalho.

2 Métodos de Pontos Interiores Aplicados à Basis Pursuit

Como vimos, o problema BP pode ser reescrito como um problema linear. Nosso enfoque será trabalhar com este problema aplicando Métodos de Pontos Interiores [2, 6, 11, 12, 13].

Vamos analisar o Método Primal-Dual Barreira Logarítmica proposto em [3] para o problema BP. No programa referente a tal método (BP_Interior), que faz parte de um pacote denominado *Atomizer*, implementado em Matlab e que pode ser encontrado em [5], vamos fazer uso do método proposto por Gill, Murray e Saunders [6], reescrevendo o problema como o seguinte programa linear perturbado:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + \frac{1}{2}\|\gamma x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|p\|_2^2 \\ \text{sujeito a} & Ax + \delta p = b \\ & x \geq 0 \end{array} , \tag{2}$$

onde γ e δ são parâmetros de perturbação pequenos, da ordem de (10^{-4}); e resolvendo-o assim como feito em [3].

Associamos ao problema linear perturbado (2) o subproblema barreira logarítmica:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x + \frac{1}{2}\|\gamma x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|p\|_2^2 - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln(x_i) \\ \text{sujeito a} & Ax + \delta p = b \end{array} .$$

A restrição de desigualdade $x \geq 0$ fica implícita. Como $\mu \to 0$ a solução converge para a solução do problema linear perturbado.

Definimos o lagrangeano como:

$$L(x, y, p) = c^T x + \frac{1}{2}\|\gamma x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|p\|_2^2 - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln(x_i) + y^T(b - Ax - \delta p).$$

Agora vamos calcular as condições necessária de primeira ordem do problema de minimização da função Lagrangeana:

$$\text{minimizar } c^T x + \frac{1}{2}\|\gamma x\|_2^2 + \frac{1}{2}\|p\|_2^2 - \mu \sum_{i=1}^{m} \ln(x_i) + y^T(b - Ax - \delta p) \;,$$

obtendo,

$$-\nabla_x L = A^T y - \gamma^2 x - c + \mu X^{-1} e = 0,$$

onde e é o vetor de dimensão apropriada, cujos elementos são compostos por 1.

No artigo de McShane, Monma e Shanno [10] vemos que quando μ do problema primal e dual são iguais, temos que $z = \mu X^{-1} e$. Assim as condições necessárias de primeira ordem são dadas por:

$$\begin{array}{l} -\nabla_x L = A^T y - \gamma^2 x - c + z = 0 \\ -\nabla_p L = \delta y - p = 0 \Rightarrow p = \delta y \\ -\nabla_y L = Ax + \delta p - b = Ax + \delta^2 y - b = 0 \end{array},$$

e por [10] novamente:

$$ZXe - \mu e = 0.$$

Rearranjando as expressões, obtemos

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} A^T y - \gamma^2 x - c + z \\ Ax + \delta^2 y - b \\ ZXe - \mu e \end{pmatrix} = 0$$

onde z é um vetor dual, X e Z são as matrizes diagonais formadas pelos elementos dos vetores x e z respectivamente.

Aplicamos o Método de Newton a fim de encontrar a solução do sistema linear acima. As direções de Newton $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ devem satisfazer o sitema:

$$\left(ADA^T + \delta^2 I\right) \Delta y = r - AD\left(X^{-1} v - t\right), \tag{3}$$

$$\Delta x = DA^T \Delta y + D\left(X^{-1} v - t\right), \tag{4}$$

$$\Delta z = X^{-1} v - X^{-1} Z \Delta x. \tag{5}$$

sendo $D = \left(X^{-1} Z + \gamma^2 I\right)^{-1}$. Para a escolha do comprimento do passo (ρ_p, ρ_d), vamos sempre escolher o maior possível, contanto que o ponto $x^{(k+1)}$ e $z^{(k+1)}$ sejam pontos interiores. A cada passo de Newton vamos decrescer o parâmetro de barreira μ monotonicamente e mais rapidamente se largos passos são tomados:

$$\mu \leftarrow \left(1 - min\left(\rho_p, \rho_d, 0,99\right)\right) \overline{\mu}. \tag{6}$$

sendo $\overline{\mu}$ o valor de μ do passo anterior.

Resolvemos (3) para Δy pelo Método dos Gradientes Conjugados [7].

O método converge quando $\left\|b - Ax - \delta^2 y\right\|_2$, $\left\|c + \gamma^2 x - z - A^T y\right\|_2$ e $z^T x$ são suficientemente pequenos.

O programa BP_Interior desenvolvido por Chen, contido em *Atomizer* [5], resolve o problema *Basis Pursuit* (1) seguindo o mesmo procedimento descrito no Método Primal-Dual Barreira Logarítmica.

Aplicamos o Método Barreira Logarítmica no problema *Basis Pursuit* (1), neste caso não teremos a condição de complementaridade, o que mudará o critério de convergência visto no método Primal-Dual Barreira Logarítmica, maiores detalhes encontram-se em [8]; e a fim de melhorar o Método Primal-Dual Barreira Logarítmica vamos introduzir as três componentes: Direção Afim-Escala, Direção de Centragem e Direção de Correção. Tendo em vista esses conceitos, e em busca de melhorar o desempenho de BP_Interior, fazemos as correções dos termos não lineares do método descrito anteriormente. Note que o termo não linear corresponde à condição de complementaridade. Assim, no primeiro passo consideraremos v tal que $v = -Zx$, e no segundo passo $v = \mu e - Zx - \Delta Z \Delta X e$, onde ΔZ e ΔX são as matrizes diagonais cujos elementos são as entradas dos vetores Δz e Δx repectivamente, que foram obtidos no primeiro passo.

Considere o Método Barreira Logarítmica e o Método Primal-Dual Barreira Logarítmica Preditor-Corretor, como BP_BL e BP_InteriorPC, respectivamente. Sendo Df a diferença relativa do valor da função objetivo do passo atual com o passo anterior e MPC referente ao Método Preditor-Corretor. Apresentamos nas Tabelas (1) e (2) um resumo dos métodos.

Tabela 1: Resumo dos Métodos.

Método	**BP_Interior**	**BP_BL**
Conjunto de variáveis	x, y e z	x e y
Propriedades	Com condição de complementaridade e sem direções de correções do MPC	Sem condição de complementaridade e sem direções de correções do MPC
Critérios de Parada	Infactibilidade Primal: $\frac{\left\|b - Ax - \delta^2 y\right\|_2}{1 + \|x\|_2} < \text{Featol};$ Infactibilidade do Dual: $\frac{\left\|c + \gamma^2 x - z - A^T y\right\|_2}{1 + \|y\|_2} < \text{Featol};$ *Gap* de Dualidade: $\frac{z^T x}{1 + \|x\|_2} < \text{PDGapTol}.$	Infactibilidade Primal: $\frac{\left\|b - Ax - \delta^2 y\right\|_2}{1 + \|x\|_2} < \text{Featol};$ Infactibilidade do Dual: $\frac{\left\|c + \gamma^2 x - \mu X^{-1} e - A^T y\right\|_2}{1 + \|y\|_2} < \text{Featol}.$ ou se: Df é menor que 10^{-4} em mais de três iterações.

Tabela 2: Resumo dos Métodos.

Método	**BP_InteriorPC**
Conjunto de variáveis	x, y e z
Propriedades	Com condição de complementaridade e com direções de correções do MPC
Critérios de Parada	Infactibilidade Primal: $\frac{\left\|b - Ax - \delta^2 y\right\|_2}{1 + \|x\|_2} < \text{Featol};$ Infactibilidade do Dual: $\frac{\left\|c + \gamma^2 x - z - A^T y\right\|_2}{1 + \|y\|_2} < \text{Featol};$ *Gap* de Dualidade: $\frac{z^T x}{1 + \|x\|_2} < \text{PDGapTol}.$

Os resumos dos métodos podem ser encontrados em [8].

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0413

3 Resultados Computacionais

A seguir, apresentamos os resultados obtidos para o Método BP_Interior de Chen [3], para o Método Barreira Logarítmica e para o nosso método modificado de BP_Interior: Método Primal-Dual Barreira Logarítmica Preditor-Corretor, os quais serão chamados de BP_BL e BP_InteriorPC, respectivamente.

Os experimentos numéricos foram implementados em Matlab R2010a, com o sistema operacional Linux, distribuição Ubuntu 11.04, processador Intel ® core i7 2600, 3.4 Ghz, 4 GB de memória DDR3, RAM clock 1333Mhz.

Na Tabela 3 listamos os sinais utilizados, com seus respectivos parâmetros, que são números ou vetores linha, o nome do dicionário que vamos utilizar para a representação e o tamanho do problema.

Tabela 3: Dados do problema.

Sinal	**Tamanho do Problema**	**Dicionário**	**par1**	**par2**	**par3**
TwinSine-1	256	DCT	4	0	0
WernerSorrows	1024	CP	6	seno	0
Carbon	1024	WP	10	qmf	0
TwinSine-2	256	DCT	4	0	0
FM-Cosine	1024	CP	6	seno	0
Gong	1024	CP	10	seno	0
Dynamic-0	256	DCT e DIRAC	MekeList(4,0)	0	0
Dynamic-2	256	DCT e DIRAC	MekeList(4,0)	0	0
MultiGong	256	MDC	8	1	0

As Tabelas 4 e 5 mostram os resultados obtidos para BP_Interior, BP_InteriorPC e BP_BL.

Na Tabela 4 temos os valores da função objetivo, ou seja, o mínimo valor de $|\alpha|_1$ em (1), e o tempo decorrido até a obtenção da convergência, sendo que FO correponde ao valor da função objetivo e o tempo é dado em segundos.

Tabela 4: Resultados computacionais para a função objetivo e tempo de processamento.

	BP_Interior		**BP_InteriorPC**		**BP_BL**	
Sinal	***FO***	***Tempo***	***FO***	***Tempo***	***FO***	***Tempo***
TwinSine-1	2,00933e+00	0,1	2,00934e+00	0,1	2,01365e+00	0,8
WernerSorrows	5,07482e+02	249,2	5,07587e+02	130,0	5,17296e+02	78,0
Carbon	6,00247e+00	19,8	6,00003e+00	19,6	6,01948e+00	707,3
TwinSine-2	2,01150e+00	0,1	2,01108e+00	0,1	2,01425e+00	1,4
FM-Cosine	2,52872e+02	237,3	2,52885e+02	210,9	2,54593e+02	102,5
Gong	4,73088e+00	3501,3	4,73171e+00	1924,5	4,73566e+00	2507,2
Dynamic-0	6,01964e+00	0,3	6,01902e+00	0,4	6,01029e+00	3,8
Dynamic-2	4,03672e+02	0,4	4,02187e+02	0,7	4,88308e+02	28,7
MultiGong	2,43810e+01	5,6	2,44009e+01	7,2	2,54105e+01	15,8

Na Tabela 5 é apresentado o número de iterações realizadas por cada método, e o número de iterações realizadas pelo Método dos Gradientes Conjugados (ItGC).

A relação entre o número de iterações e o valor da função objetivo, obtidos nos métodos implementados, com os sinais da Tabela 3 podem ser encontrados em [8].

Nota-se que BP_Interior e BP_InteriorPC possuem desempenho computacional equivalente em relação ao valor da função objetivo. BP_BL não teve um resultado satisfatório em relação aos outros, obtendo um valor da função objetivo melhor apenas em *Dynamic-0*, mas tendo um

Tabela 5: Número de iterações dos métodos.

	BP_Interior		BP_InteriorPC		BP_BL	
Sinal	***It***	***ItGC***	***It***	***ItGC***	***It***	***ItGC***
TwinSine-1	11	59	9	90	24	1745
WernerSorrows	18	20883	11	10850	91	6687
Carbon	8	85	6	99	35	4722
TwinSine-2	9	43	9	97	24	2950
FM-Cosine	17	20098	12	17891	67	8862
Gong	21	11510	19	21681	29	15377
Dynamic-0	7	40	5	54	24	3910
Dynamic-2	7	52	7	91	220	29022
MultiGong	19	853	15	1097	57	11088

tempo computacional bem maior. A diferença dos valores alcançados para a função objetivo deve-se ao fato do critério de convergência ser diferente para BP_BL.

Os tempos de convergência para BP_Interior, BP_InteriorPC foram similares, sendo as diferenças mais significativas obtidas para o sinal *WernerSorrows*, onde BP_Interior obteve $249,2$ segundos para a convergência, praticamente o dobro de tempo que BP_InteriorPC ($130,0$ segundos); e para o sinal *Gong*, obtendo tempos bem distintos para os dois métodos, para BP_Interior obtemos $1924,5$ segundos para a convergência e para BP_InteriorPC $3501,3$ segundos. O tempo obtido por BP_BL foi menor que dos outros métodos apenas para *WernerSorrows* e *FM-Cosine*, contudo o valor da função objetivo obtida, não foi satisfatória.

Quando o número de iterações realizadas por BP_InteriorPC não foi menor que o número realizado por BP_Interior, essa mostrou-se igual.

Em relação ao Método dos Gradientes Conjugados podemos notar pelos resultados obtidos que o número de iterações do Método dos Gradientes Conjugados aumenta constantemente. Isso ocorre porque a solução inicial está próxima do centro da região factível. Assim, nas iterações iniciais, o sistema de equações (3) é bem condicionado e o método converge rapidamente. Mas, como $x^T z$ converge para 0, z/x convergirá para infinito ou 0. Assim, a matriz $D = \left(X^{-1}Z + \gamma^2 I\right)$ e a matriz $\left(ADA^T + \delta^2 I\right)$ tornam-se mais mal-condicionadas, e o método demora para convergir. Nos métodos implementados, não pré-condicionamos a matriz A. Por isso, obtivemos grande número de iterações no Método dos Gradientes Conjugados.

4 Conclusões

Nesse trabalho apresentamos o problema de minimização *Basis Pursuit*, tendo como motivação sua aplicação em problemas envolvendo processamento de sinais.

Reescrevemos o problema *Basis Pursuit* como um problema de programação linear em sua forma padrão por meio de associações.

Consideramos a reformulação do problema como um problema quadrático e introduzimos o método Primal-Dual Barreira Logarítmica e nossos métodos propostos: Barreira Logarítmica e Primal-Dual Barreira Logarítmica Preditor-Corretor, sendo que este apresentou resultados satisfatórios em relação ao método implementado por Chen.

O valor da função objetivo foi muito similar para os métodos Primal-Dual Barreira Logarítmica e Primal-Dual Barreira Logarítmica Preditor-Corretor. O método Barreira Logarítmica não obteve resultados satisfatórios comparado aos outros métodos. Isso já era esperado, visto que não estamos considerando a condição de complementaridade.

Em relação ao tempo de convergência, também obtivemos tempos similares, com diferenças significativas em apenas dois sinais para os Métodos Primal-Dual Barreira Logarítmica e Primal-Dual Barreira Logarítmica Preditor-Corretor. Para o método Barreira Logarítmica, quando seu

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0413

tempo de convergência foi menor em comparação aos outros métodos, o valor da função objetivo não foi satisfatório.

O número de iterações realizadas pelo métodos Primal-Dual Barreira Logarítmica Preditor-Corretor foi menor ou igual as realizadas pelo método Primal-Dual Barreira Logarítmica.

Portanto, obtivemos um melhor desempenho com as direções afim-escala, direção de centragem e direção de correção do Metodo Preditor Corretor, e um resultado menos eficiente quando não consideramos a condição de complementaridade.

5 Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP e CNPq.

Referências

[1] R. G. Baraniuk, Compressive sensing [lecture notes], *Signal Processing Magazine, IEEE*, **24**, No. 4 (2007), 118–121.

[2] D. R. Cantane, E. G. Contharteze, A. R. L. Oliveira, Método de Pontos Interiores Barreira Logarítmica Preditor-Corretor Especializado para o Problema de Regressão pela Norma Lp, *TEMA – Tend. Mat. Apl. Comput.*, **13**, (2012), 219–231.

[3] S. S. Chen, "Basis Pursuit", Tese de Doutorado, Stanford University, 1995.

[4] S. S. Chen, D. L. Donoho, A. Michael, Atomic decomposition by basis pursuit, *SIAM review*, **43**, No. 1 (2001), 129–159.

[5] S. S. Chen, D. L. Donoho, A. Michael, Atomizer for Matlab5. x, Disponível em: <http://www-stat. stanford. edu/ atomizer>, Acesso em: 15 nov. 2012.

[6] P. Gill, W. Murray, D. B. Ponceleon, A. Michael, Solving reduced KKT systems in barrier methods for linear and quadratic programming, *DTIC Document*, (1991).

[7] G. H. Golub, C. F. Van Loan, "Matrix computations", JHU Press, 2012.

[8] P. A. Kikuchi, "Métodos de Pontos Interiores Aplicados à Basis Pursuit", Dissertação de Mestrado, IMECC, Unicamp, Campinas, SP, 2013.

[9] I. J. Lustig, R. Marsten, D. F. Shanno, On implementing Mehrotra's predictor-corrector interior-point method for linear programming, *SIAM Journal on Optimization, SIAM*, **2**, No. 3 (1992), 435–449.

[10] K. A. McShane, C. L. Monma, D. Shanno, An implementation of a primal-dual interior point method for linear programming, *ORSA Journal on computing, INFORMS*, **1**, No. 2 (1989), 70–83.

[11] S. Mehrotra, On the implementation of a primal-dual interior point method, *SIAM Journal on optimization, SIAM*, **2**, No. 4 (1992), 575–601.

[12] A. R. L. Oliveira, D. R. Cantane, Métodos de Pontos Interiores Aplicados ao Problema de Regressão pela Norma Lp, *TEMA – Tend. Mat. Apl. Comput.*, **5**, (2004), 269–279.

[13] S. J. Wright, "Primal-Dual Interior-Point Methods", em *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 54, 1987.

