

Transformações, isometrias e grupos – do ensino básico ao ensino superior

Márcia Cristina Lemos Guimarães*

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP
13083-859, Campinas, SP
E-mail: mclgui@hotmail.com

Claudina Izepe Rodrigues

Universidade Estadual de Campinas - Departamento de Matemática
13083-859, Campinas, SP
E-mail: claudina@ime.unicamp.br

RESUMO

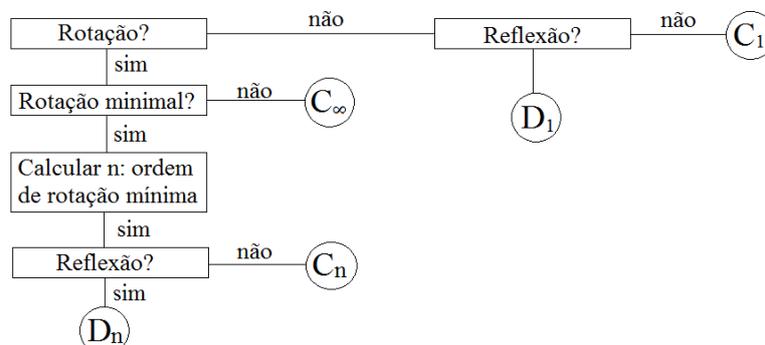
É de grande relevância o ensino das transformações geométricas, tanto no ensino básico como no ensino superior, pois são ferramentas muito úteis em demonstrações, para resolver problemas de geometria, na introdução da ideia de grupos e no raciocínio matemático em geral.

Uma transformação geométrica no plano é uma correspondência biunívoca do conjunto dos pontos do plano nele mesmo. Em particular, se F é uma figura no plano, a imagem de F pela transformação T é o conjunto F' dos pontos imagens de F , denotado por $F'=T(F)$. Dentre as transformações geométricas no plano temos as isometrias e a homotetia, que são princípios básicos para os conceitos de congruência e de semelhança, respectivamente. Vamos direcionar nosso estudo para as isometrias no plano.

Isometria é uma transformação geométrica que preserva a distância entre pontos. São isometrias: translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes. O conjunto das isometrias possui uma estrutura algébrica de grupo com a operação composição.

Grupos de simetria de uma figura: considerando F o conjunto de pontos de uma figura contida no plano P , o grupo de simetrias de F é o conjunto de todas as transformações no plano que deixam F invariante, ou seja, o conjunto imagem de F é o próprio F . O processo de determinar o grupo de simetria pode ser exaustivo. O uso do algoritmo I para determinar o grupo de simetrias de uma figura limitada pode tornar esse trabalho mais simplificado. No algoritmo, C_n denota o grupo cíclico gerado por uma rotação de ordem n e D_n denota o grupo diedral de ordem $2n$.

Algoritmo I - Grupo de simetria de figuras limitadas



Grupos de frisos: Um grupo de isometrias que deixam invariante uma reta c e cujas translações formam um grupo cíclico infinito é um Grupo de Frisos com centro c . Existem 7 desses grupos.

A proposta deste trabalho para desenvolver os temas abordados acima é usar atividades envolvendo simetria tendo em vista a familiarização do aluno com a ideia de transformações e de grupos.

* Bolsista de mestrado - CAPES

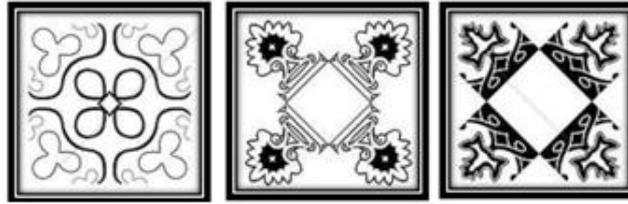


Figura 1

Apenas observando a figura 1 conseguimos identificar suas simetrias: 4 reflexões e 4 rotações. Denotemos o conjunto das simetrias da figura como $S = \{R_1, R_2, R_3, R_4, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ\}$. O uso de recursos computacionais permite uma melhor visualização de tais simetrias, bem como fazer composições com as mesmas. A composição de uma rotação de 90° com uma rotação de 180° produz uma rotação de 270° que pertence ao conjunto S . Podemos fazer outras composições como, duas reflexões em torno do mesmo eixo ou uma rotação de -90° , e verificar que também pertencem ao conjunto S . Escolhendo três elementos do conjunto S , por exemplo, R_2, R_4 e 90° , e operando-os da seguinte forma: $[(R_2 \circ R_4) \circ 90^\circ]$ e $[R_2 \circ (R_4 \circ 90^\circ)]$ podemos verificar que as duas formas de composição deixam a figura na mesma posição. Observe que, ao desenvolver passo a passo esta atividade estamos introduzindo a ideia de grupo sem necessariamente dar a definição dessa estrutura algébrica. Usando a linguagem adequada para cada faixa etária, podemos aplicá-la tanto no ensino básico como no ensino superior.

O algoritmo I pode ser aplicado para identificar o grupo de simetria de uma figura limitada, pois simplifica o trabalho.

Para iniciar a ideia de grupos de frisos, podemos criar faixas ornamentais usando os recursos do geogebra abordando os 7 tipos de frisos. Como exemplo, utilizando reflexão deslizante produzimos a figura 2.



Figura 2

Esperamos que ao final deste trabalho o aluno tenha assimilado a ideia de transformações e de grupos. Tais conceitos são muito úteis na resolução de diversos problemas.

Palavras-chave: Transformações, isometrias, ensino, geometria e geogebra.

Referências

- [1] Hernstein, I. N, *Tópicos de Álgebra*, Polígono S. A., 1970.
- [2] Lima. E. L, *Isometrias*, Coleção do Professor de Matemática, Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1996.
- [3] Martin, G. E. *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] Rose, Bruce I. e Stafford, Robert D., *An Elementary Course in Mathematical Symmetry*, Mathematical Association of America, Vol. 88, No. 1 (Jan., 1981), pp. 59-64.
- [5] Schattschneider. Doris, *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*, Mathematical Association of America, 85 (6), pp. 439-450, 1978.
- [6] Veloso. Eduardo. *Geometria-Temas Actuais*, Instituto de Inovação Educacional, 2000.
- [7] Yaglom.I.M, *Geometric Transformations I*, The Mathematical Association of America, 1962.