Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Modelo euleriano tridimensional para simular a dispersão de poluentes levando em conta o meandro do vento

Viliam Cardoso da Silveira* **Gervásio Annes Degrazia**
Universidade Federal de Santa Maria - Programa de Pós-Graduação em Meteorologia,
97105-900, Santa Maria, RS
E-mail: viliamcardoso@gmail.com, gervasiodegrazia@gmail.com,

Daniela Buske
Universidade Federal de Pelotas - Departamento de Matemática e Estatística,
96010-900, Campus Capão do Leão, Capão do Leão, RS
E-mail: danielabuske@gmail.com.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar um novo modelo para simular a dispersão de poluentes atmosféricos levando em conta o meandro do vento em condições de vento fraco. Para atingir esse objetivo será apresentada uma nova solução analítica para a equação de advecção-difusão tridimensional. A equação de advecção-difusão é resolvida pela combinação da transformada de Laplace e da técnica GILTT (Generalized Integral Laplace Transform Technique) [3]. A importância de se estudar a dispersão de poluentes sob condições de vento fraco vem do fato que tais condições ocorrem com muita frequência e são de extrema importância para episódios de poluição. Nessas situações os poluentes não estão sujeitos a uma grande dispersão lateral, o que torna difícil a modelagem deste processo por esquemas que normalmente descrevem a difusão de contaminantes. Segundo [2] uma das características para ocorrência de meandro do vento é a presença de grandes lóbulos negativos observados nas funções de autocorrelação, das componentes horizontais do vento para condições de vento fraco. Para verificar a existência de lóbulos negativos, primeiramente será testada a metodologia proposta por Frenkiel [4].

A equação de advecção-difusão sob condições estacionárias, baseada na hipótese de transporte por gradiente ou teoria K, pode ser escrita como [1]:

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{c}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{c}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{c}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial \overline{c}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial \overline{c}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial \overline{c}}{\partial z}\right) \tag{1}$$

onde $\overline{c} = \overline{c}(x, y, z)$ representa a concentração média de uma contaminante passivo, $\overline{u}$, $\overline{v}$ e $\overline{w}$ representam as componentes cartesianas do vento médio e K_x, K_y e K_z são os coeficientes de difusão na direção longitudinal, lateral e vertical, respectivamente.

Para resolver o problema (1), inicialmente aplicamos a técnica da transformada integral na variável y. Com isso expandimos a concentração do poluente como:

$$\overline{c}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{c_n}(x, z)\, \zeta_n(y)}{N_n^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

onde $(\zeta_n(y) = \cos(\lambda_n y))$ é um conjunto de autofunções ortogonais e $\lambda_n = n\pi/L_y$ para $n = 0, 1, 2, 3, ...$ são os autovalores do problema de Sturm-Liouville associado. Assim, substituindo a equação (2) na equação (1) e tomando momento $(\int_0^{L_y} () \Psi_m dy)$, temos:

$$\alpha_{n,m}\overline{u}\frac{\partial \overline{c_n}}{\partial x} + \beta_{n,m}\overline{v}\,\overline{c_n} + \alpha_{n,m}\overline{w}\frac{\partial \overline{c_n}}{\partial z} = \alpha_{n,m}\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial \overline{c_n}}{\partial x}\right) + \alpha_{n,m}\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial \overline{c_n}}{\partial z}\right) - \alpha_{n,m}{\lambda_n}^2 K_y \overline{c_n} \tag{3}$$

*bolsista de doutorado CAPES

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0338

onde $\overline{c_n} = \overline{c_n}(x,z)$. As matrizes $\alpha_{n,m}$ e $\beta_{n,m}$ são dadas respectivamente por:

$$\alpha_{n,m} = \frac{1}{N_n^{\frac{1}{2}} N_m^{\frac{1}{2}}} \int_0^{L_y} \zeta_n(y)\zeta_m(y)dy = \begin{cases} 0, \text{m} \neq \text{n} \\ 1, \text{m = n} \end{cases} \tag{4}$$

$$\beta_{n,m} = \frac{1}{N_n^{\frac{1}{2}} N_m^{\frac{1}{2}}} \int_0^{L_y} \zeta_n^{'}(y)\zeta_m(y)dy = \begin{cases} \frac{2n^2}{L_y(m^2-n^2)}\left[cos(n\pi)cos(m\pi)-1\right], \text{m} \neq \text{n} \\ 0, \text{m = n} \end{cases} \tag{5}$$

Propõe-se que a solução do problema (3) é dada por $\overline{c_n}(x,z) = \sum_{i=0}^{I} \overline{c_{n,i}}(x)\, \varsigma_i(z)$. Substituindo essa solução na equação (3) e tomando momentos, podemos reescrever a equação (3) em notação matricial da seguinte maneira:

$$Y''(x) + FY'(x) + GY(x) = 0 \tag{6}$$

onde, $Y(x)$ é o vetor coluna cujas componentes são $\overline{c_{n,i}}(x)$ e as matrizes F e G são definidas, respectivamente, como: $F = B^{-1}D$ e $G = B^{-1}E$. As matrizes B, D e E são dadas respectivamente por:

$$b_{i,j} = \alpha_{n,m} \int_0^h K_x\, \varsigma_i(z)\, \varsigma_j(z) dz \tag{7}$$

$$d_{i,j} = -\alpha_{n,m} \int_0^h \overline{u}\, \varsigma_i(z)\, \varsigma_j(z) dz + \alpha_{n,m} \int_0^h K_x'\, \varsigma_i(z)\, \varsigma_j(z) dz \tag{8}$$

$$\begin{aligned} e_{i,j} = {}& -\alpha_{n,m} \int_0^h \overline{w}\, \varsigma_i'(z)\, \varsigma_j(z) dz + \alpha_{n,m} \int_0^h K_z'\, \varsigma_i'(z)\, \varsigma_j(z) dz - \\ & -\alpha_{n,m}\lambda_i^2 \int_0^h K_z\, \varsigma_i(z)\, \varsigma_j(z) dz - \alpha_{n,m}\lambda_i^2 \int_0^h K_y\, \varsigma_i(z)\, \varsigma_j(z) dz - \beta_{n,m} \int_0^h \overline{v}\, \varsigma_i(z)\, \varsigma_j(z) dz \end{aligned} \tag{9}$$

Para resolver o problema da equação (6) aplicamos o método de redução de ordem, $[Y(x) = Z_1(x)]$ e $[Y^{'}(x) = Z_2(x)]$, obtendo assim o seguinte problema transformado: $Z'(x) + HZ(x) = 0$, sendo o mesmo resolvido pela técnica da transformada de Laplace e diagonalização. Cabe salientar que nenhuma aproximação foi feita ao longo da derivação desta solução, exceto pelo truncamento do somatório da equação (2) e somatório da solução do problema da equação (3).

Os resultados obtidos até o presente momento, não levando em conta o meandro do vento [5], mostram que há uma boa concordância entre os dados observados experimentalmente e preditos pelo modelo [6] ao serem considerados dados de experimentos de vento fraco da literatura.

Palavras-chave: *Equação de advecção-difusão, vento fraco, meandro do vento, solução analítica*

Referências

[1] A. K. Blackadar, "Turbulence and diffusion in the atmosphere: Lectures in Environmental Sciences", *Springer-Verlag*, 1997.

[2] D. Anfossi, D. Oettl, G. Degrazia, A. Goulart, An analysis of sonic anemometer observations in low wind speed conditions, *Boundary-Layer Meteorology*, 114 (2005) 179-203.

[3] D. Moreira, M. T. Vilhena, D. Buske, T. Tirabassi, The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere, *Atmospheric Research*, 92 (2009) 1-17.

[4] F. N. Frenkiel, Turbulent diffusion: mean concentration distribution in a flow field of homogeneous turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, 3 (1953) 61-107.

[5] V. C. Silveira, "Simulação tridimensional da dispersão de poluentes na atmosfera em condições de vento fraco", Dissertação de mestrado, UFPel-Pelotas, 2013.

[6] V. C. Silveira, D. Buske, R. S. Quadros, J. C. Carvalho, Simulation of pollutant dispersion under low wind conditions in a stable atmospheric boundary layer, *22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*, 2013.

