Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Teoria dos jogos aplicada à ecologia matemática

Augusto César de Castro Barbosa, **Carlos Antônio de Moura**,
Instituto de Matemática e Estatística, IME, UERJ,
20550-900, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: accb@ime.uerj.br, demoura@ime.uerj.br,

Daniela Ribeiro Monteiro
Depto de Engenharia Mecânica, FEN, UERJ
20940-903, Rio de Janeiro, RJ
E-mail: danielarmonteiro@gmail.com.

Resumo: *A teoria dos jogos é utilizada junto à teoria do controle para modelar matematicamente um problema em ecologia: o controle de pragas em uma dada lavoura. Trata-se de um problema relevante e muito investigado, com diferentes ferramentas – em particular com aquelas de controle ótimo.*

Palavras-chave: *Teoria dos jogos, controle ótimo, sistemas biológicos*

1 Introdução

A ecologia é a ciência que pesquisa as interações entre os organismos e seu ambiente. As interações podem ser entre seres vivos e/ou com o meio ambiente. A ecologia matemática se propõe a utilizar modelos matemáticos para analisar, entender, avaliar, prever fenômenos ecológicos. Neste trabalho apresentamos um problema real na agricultura: o controle de pragas. Para realizar esse controle, utilizamos as equações de Lotka-Volterra [2, 9] com competição. Introduzimos um controle e, com o emprego de dados reais, montamos um jogo para o qual obtemos um equilíbrio de Nash. Trata-se de uma aplicação da teoria dos jogos diferenciáveis, uma área que une a teoria dos jogos (clássica) à teoria de controle.

Thomas Malthus (1766–1834) foi o responsável pela teoria populacional denominada malthusiana. Malthus observou que o crescimento populacional, entre 1650 e 1750, dobrou como consequência do aumento da produção de alimentos, das melhorias das condições de vida nas cidades, do aperfeiçoamento do combate às doenças, das melhorias no saneamento básico e dos benefícios obtidos com a revolução industrial. Esses fatores provocaram um declínio na taxa de mortalidade, ampliando o crescimento natural. Preocupado com o crescimento populacional acelerado, Malthus publicou em 1798 uma série de ideias alertando para a importância do controle da natalidade.

2 Teoria dos Jogos

A teoria dos jogos é o estudo matemático do contexto das tomadas de decisão entre indivíduos, sendo a escolha de cada um dependente das decisões dos demais. Essa teoria foi inicialmente formalizada com a publicação por John von Neumann e Oskar Morgenstern do texto *The theory of games and economic behavior* [5]. Os elementos básicos de um jogo são: os jogadores, as regras do jogo, os resultados e os ganhos.

Os jogos são classificados quanto ao número de jogadores: um jogador, dois jogadores, n-jogadores e quanto ao seu tipo, podendo ser: com ou sem repetição, finito, de soma zero ou

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0346

soma não zero, simultâneos ou sequenciais, informação perfeita ou imperfeita e cooperativo ou não cooperativo.

Introduzimos a proposta de um jogo diferenciável no controle de pragas no campo. Para isso, determinaremos os jogadores, o plano de fundo e as condições do jogo.

O jogo é constituído por dois jogadores, sendo eles: Jogador I – as pragas (neste caso, Lagarta da Soja) e Jogador II – o agricultor (representado pelos inimigos naturais da lagarta da soja).

O controle de pragas provoca benefícios e malefícios. Manter uma plantação sem o uso de agrotóxico a torna muito mais vulnerável à ação das pragas, o que induz à perda da produção. Consequentemente, aumenta o valor final do produto, tendo em vista uma menor produção por área comparativamente àquela obtida com emprego de agrotóxico.

O plano de fundo do jogo será uma lavoura infestada por uma certa praga, cujo controle biológico será um inimigo natural da praga.

3 Modelagem Matemática de dinâmica populacional

Um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) apresenta a forma

$$dx/dt = g(t, x), \tag{1}$$

onde a lei g, que regula a taxa de variação da variável x com relação ao tempo, depende não somente de x (eventualmente multidimensional), mas também do tempo t, variável unidimensional. O sistema apresentado é chamado de sistema não-autônomo. Já um sistema autônomo é aquele cuja configuração independe do tempo. Assim podemos sempre considerar o instante inicial como sendo $t = 0$.

Malthus em [3] conjecturou que, dados recursos abundantes, as populações humanas apresentam a tendência de crescimento geométrico. Esse padrão pode ser descrito com:

$$dx/dt = xr,$$

onde $r (r > 0)$ é a taxa de crescimento relativo da população x.

Em 1838 Verhulst [8] propôs uma modificação na equação de Malthus onde considera que os recursos são limitados, e a taxa de crescimento da população, proporcional à população em cada instante, criando a equação logística para descrever o crescimento de uma população com recursos limitados. A equação logística é normalmente escrita como uma equação diferencial do tipo:

$$dx/dt = x(a - \gamma x), \tag{2}$$

onde dx/dt é a taxa de crescimento populacional, $x = x(t)$ é a densidade da população em um instante t, a é uma constante positiva que representa a taxa de crescimento populacional quando não há fatores limitantes e γ é uma constante positiva que representa o limite populacional, isto é, o valor para o qual a população tende no decorrer do tempo.

A equação logística considera que a taxa de crescimento, dx/dt, depende não só da população, mas também das condições existentes no meio em que está presente. O termo $(-\gamma x)x$ na equação representa a contribuição da competição entre os indivíduos da mesma espécie no crescimento da população. Esta equação retrata uma única população.

O modelo de Lotka-Volterra foi pioneiro ao descrever matematicamente a interação entre duas populações distintas (presas e predadores). A introdução deste modelo, bem como as suas consequentes variações, foi uma das principais contribuições para a dinâmica de populações. A relação entre presa e predador é descrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - \alpha y) \\ dy/dt = y(-b + \beta x) \end{cases} . \tag{3}$$

As equações, chamadas equações Lotka-Volterra, onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ representam, respectivamente, as populações de presas/hospedeiro e predadores/parasitóide, foram construídas a partir das seguintes hipóteses:
1. $dx/dt = ax$, com $a > 0$ quando $y = 0$
2. $dy/dt = -by$, com $b > 0$ quando $x = 0$
3. Os termos βxy e $-\alpha yx$, $\beta > 0$ e $\alpha > 0$, representam as interações entre as duas espécies. O termo βxy implica no crescimento de y, enquanto o termo $-\alpha yx$ implica no decrescimento de x.

Supõe-se que os recursos para as presas são ilimitados, e que o único fator inibidor para seu crescimento é a presença dos predadores.

Trataremos agora de um modelo matemático que une os dois modelos acima, isto é, o modelo da equação logística e o modelo de Lotka-Volterra. Vamos admitir na primeira equação de (3), o fator natural que inibe o crescimento da população, isto é, essa equação é modificada para, quando y for igual a zero, obtermos (2). O sistema é definido como um caso particular de (3), sendo referido como modelo de Lotka-Volterra com competição,

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ dy/dt = y(-b + \beta x) \end{cases}, \tag{4}$$

onde:
a. a, γ, α, b e β são constantes positivas;
b. a representa a taxa de crescimento das pragas;
c. b representa a taxa de mortalidade dos inimigos naturais das pragas;
d. $-\alpha yx$ e βxy são as interações entre as duas populações;
e. $(-\gamma x)x$ representa a competição intraespecífica das pragas, que concorrem pelo alimento em lavouras.

Esse modelo considera a existência de um número elevado de presas, não sendo portanto o foco da análise a competição intraespecífica entre predadores. Assim, não introduzimos um termo que corresponderia à competição intraespecífica na equação dos predadores.

Considerando o sistema (4), podemos calcular seus pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} x(a - \gamma x - \alpha y) = 0 \\ y(-b + \beta x) = 0 \end{cases}.$$

Como as condições $x = 0$ ou $y = 0$ não apresentam interesse para o modelo, pois x e y representam as densidades das populações. Logo, o ponto de equilíbrio para o sistema sem controle é

$$\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a - \frac{\gamma b}{\beta}}{\alpha} \right). \tag{5}$$

O ponto de equilíbrio do sistema (4) possui um nível maior do que o desejável, mesmo o modelo sendo estável. Por isso, neste caso, é necessário a aplicação do controle.

Observe que o número de pragas no ponto de equilíbrio é invariante relativamente aos coeficientes da primeira equação. Ou seja, mudar qualquer parâmetro na primeira equação não auxiliaria para reduzir essa população.

De fato, teríamos

$$\begin{cases} dx/dt = x(aa_1 - \gamma\gamma_1 x - \alpha\alpha_1 y) \\ dy/dt = y(-b + \beta x) \end{cases}, \tag{6}$$

cujo ponto de equilíbrio para o sistema sem controle é

$$\left(\frac{b}{\beta}, \frac{aa_1 - \frac{\gamma\gamma_1 b}{\beta}}{\alpha\alpha_1} \right). \tag{7}$$

Já para a segunda equação, alterar os valores dos coeficientes implica na obtenção de valores diferentes para as pragas no equilíbrio:

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ dy/dt = y(-bb_1 + \beta\beta_1 x) \end{cases}, \tag{8}$$

cujo ponto de equilíbrio é

$$\left(\frac{bb_1}{\beta\beta_1}, \frac{a - \frac{\gamma bb_1}{\beta\beta_1}}{\alpha} \right). \tag{9}$$

Essa expressão significa que obtivemos:
i. Aumento do número de pragas caso $b_1 > \beta_1$
ii. Diminuição do número de pragas caso $b_1 < \beta_1$
iii. Mesmo número de pragas caso $b_1 = \beta_1$

Para a estratégia de controle biológico, onde é feita a inserção de inimigos naturais, de modo a manter o sistema em um estado de equilíbrio abaixo de danos econômicos, utilizamos o modelo (4), introduzindo na segunda equação uma função de controle, denominada U. Assim, a equação que descreve a taxa de variação da densidade populacional do inimigo natural da praga em questão é

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ dy/dt = y(-b + \beta x) + U \end{cases}. \tag{10}$$

A aplicação de uma função de controle se baseia na ideia de que existe um certo limite de quantidade de pragas que determina a margem de danos econômicos, denotada por x_d.

4 Aplicação ao controle de pragas em lavouras de soja

A lagarta-da-soja é encontrada em todos os locais de cultivo, sendo o desfolhador mais comum da soja no Brasil. Costuma atacar as lavouras a partir de novembro, nas regiões ao norte do Paraná, e a partir de dezembro a janeiro no sul do país, podendo causar desfolhamento que pode chegar até a 100%. Segundo os níveis de ação pelo MIP-Soja [1], *A. gemmatalis* deve ser controlada com inseticidas químicos, quando forem encontradas, em média, 20 lagartas pequenas (igual ou superior a 1.5cm) por metro quadrado. No caso de ataques da lagarta-da-soja, existem várias opções de produtos eficientes, tanto os inseticidas químicos quanto os biológicos, a exemplo do *Baculovirus anticarsia*, específico para a lagarta-da-soja.

O agricultor busca diminuir a quantidade de lagartas por hectare com o auxílio de inimigos naturais no meio ambiente. Para isso, ele busca encontrar um controle U de modo que a quantidade total de lagartas permaneça num patamar economicamente estável. Usaremos $x_d = 20$ (vinte lagartas pequenas) como ponto de equilíbrio estável para o número de lagartas.

Voltando às equações de Lotka-Volterra com competição

$$\begin{cases} dx/dt = x(a - \gamma x - \alpha y) \\ dy/dt = y(-b + \beta x) + U \end{cases}, \tag{11}$$

desejamos encontrar U de modo que o ponto $P = (x_d, y_d)$ seja economicamente estável.

Utilizaremos no nosso jogo os dados de Santos [6] para os parâmetros das equações acima.

Tabela 1: Dados da EMBRAPA.

a	b	α	γ	β
0.16	0.19	0.02	0.001	0.0029

Substituindo os valores dos parâmetros nas equações sem controle obtemos:

$$\begin{cases} dx/dt = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ dy/dt = y(-0.19 + 0.0029x) \end{cases}.$$

Fazendo

$$\begin{cases} x(0.16 - 0.001x - 0.02y) = 0 \\ y(-0.19 + 0.0029x) = 0 \end{cases},$$

obtemos como ponto de equilíbrio o valor $P_i \cong (65.5; 4.7)$, um valor que não é economicamente viável para o agricultor.

Substituindo $x = x_d = 20$ em $(0.16 - 0.001x - 0.02y) = 0$, obtemos $y_d = 7$, ou seja, $P_f = (x_d, y_d) = (20, 7)$.

O agricultor busca então sair do ponto $P_i \cong (65.5; 4.7)$ para o ponto $P_f = (x_d, y_d) = (20, 7)$. Para isso ele utilizará um controle U na segunda equação, ou seja:

$$\begin{cases} dx/dt = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ dy/dt = y(-0.19 + 0.0029x) + U \end{cases}.$$

Variando gradualmente o parâmetro b da equação (4), observamos que, quando $b = 0.058$, a solução do sistema é o ponto $(20, 7)$, ou seja, o ponto economicamente estável. Assim sendo, determinamos $U = 0.132y$ e podemos reescrever o sistema conforme segue:

$$\begin{cases} dx/dt = x(0.16 - 0.001x - 0.02y) \\ dy/dt = y(-0.19 + 0.0029x) + 0.132y \end{cases}.$$

Determinando para cada valor de

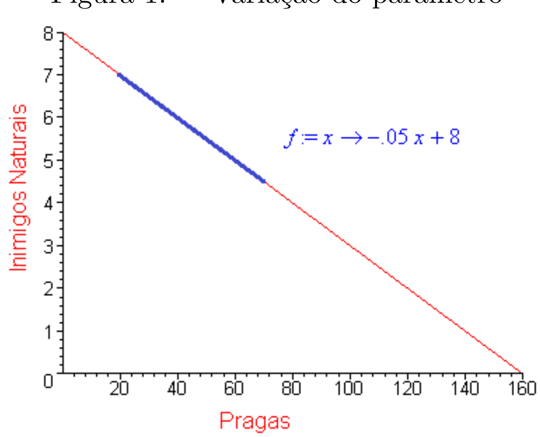
$$b \in \{x \in I\!R | 0.058 \leq x \leq 0.019\}$$

o ponto

$$P^* = \left(\frac{b}{0,0029}, \frac{0.16 - 0.001\frac{b}{0.0029}}{0.02} \right),$$

obtemos o gráfico que segue.

Figura 1: $-$ Variação do parâmetro



DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0346

Variando a função até os pontos (0.8) e (160.0), obtemos a função linear $f(x) = -0.05x + 8$. A partir dessa função, podemos montar a seguinte tabela.

Figura 2: $-$ Jogo lagarta X inimigos naturais

	Lagartas	
Inimigos	Livres no Ambiente	Fora do Ambiente
Livres no Ambiente	7; 20	8; 0
Fora do Ambiente	0; 160	0; 0

Esta tabela é a representação do nosso jogo. Observe que dadas as equações de Lotka-Volterra com competição e realizando uma variação gradual no parâmetro b para assim conseguir obter o controle U, montamos o gráfico acima. Este gráfico nos forneceu a tabela que simboliza um jogo.

A partir dessa tabela, verificamos que o ponto $(20, 7)$ é um equilíbrio de Nash, não havendo nenhum outro nesse jogo.

Figura 3: $-$ Equilíbrio de Nash

	Lagartas	
Inimigos	Livres no Ambiente	Fora do Ambiente
Livres no Ambiente	7; 20	8; 0
Fora do Ambiente	0; 160	0; 0

Concluímos então que para ir do ponto $P_i \cong (65.5; 4.7)$ para o ponto $P_f = (x_d, y_d) = (20, 7)$, o agricultor deve modificar o parâmetro referente à taxa de mortalidade dos inimigos naturais. Para isso, basta inserir no meio maior quantidade de inimigos, fazendo com que essa taxa decresça e se consiga assim atingir o ponto economicamente estável.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0346

Referências

[1] Embrapa, "Soja - Manejo integrado de pragas", Circular Técnica, Londrina, 2000.

[2] A.J.Lotka, "Elements of physical biology", Williams & Wilkins Company, Baltimore, 1925.

[3] R.T. Malthus, "An essay on the principle of population", J. Johnson, St. Paul's Church-Yard, 1798.

[4] D.R. Monteiro, "Uma introdução à teoria dos jogos", Monografia, UERJ, Rio de Janeiro, 2010.

[5] J.V. Neumann, O. Morgenstern, "Theory of games and economic behavior", Princeton University Press, New Jersey, 1944.

[6] L.H. Santos, "Teoria de controle ótimo com aplicações a sistemas biológicos", Dissertação, UERJ, Rio de Janeiro, 2012.

[7] M. Rafikov, "Notas do minicurso: aplicação dos modelos matemáticos no controle de populações", UFSC, Santa Catarina, 2003.

[8] P.F. Verhulst, "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement", Correspondance mathématique et physique, 1838.

[9] V. Volterra, "Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically", Nature, 1926.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0346