

Uma nova abordagem analítica para o problema da dispersão de poluentes radioativos na atmosfera

Guilherme J. Weymar*

Marco Tullio Vilhena

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PROMEC, UFRGS,
90050-170, Porto Alegre, RS

E-mail: guicefetr@gmail.com, mtmbvilhena@gmail.com,

Daniela Buske

Universidade Federal de Pelotas - Departamento de Matemática e Estatística
96160-000, Campus Capão do Leão, Capão do Leão, RS

E-mail: danielabuske@gmail.com.

RESUMO

A simulação de emissões de substâncias radioativas na atmosfera é um assunto de grande importância para a prevenção de impactos ambientais, em caso de um acidente. A formulação de planos de emergência é baseada nos possíveis cenários de concentração no ar, e portanto, requer modelos matemáticos de dispersão de contaminantes na atmosfera capazes de relacionar as causas (fontes) com os relativos efeitos (concentração de poluente). O equacionamento matemático clássico para este tipo de problema é dado pela equação de advecção-difusão [5].

Poucas soluções analíticas da equação de advecção-difusão são encontradas na literatura, porém muitos avanços foram obtidos utilizando o método GILTT (*Generalized Integral Laplace Transform Technique*) [4]. Para a solução de problemas diferenciais parciais, esta técnica de transformação integral combina uma expansão em série com uma integração. Na expansão é usada uma base trigonométrica determinada com o auxílio de um problema auxiliar. A integração é feita em todo o intervalo da variável transformada, fazendo proveito da propriedade de ortogonalidade da base usada na expansão. Este procedimento resulta num sistema de equações diferenciais ordinárias, que, uma vez solucionado, é facilmente invertido para a obtenção do resultado da equação original. O problema transformado é resolvido analiticamente pela técnica da transformada de Laplace e diagonalização. A generalização da solução bidimensional, inicialmente foi realizada assumindo que a pluma do poluente possui uma distribuição Gaussiana na direção y (chamado GILTTG) [4]. Em 2009 surgiu o método GILTT tridimensional conhecido como 3D-GILTT [3]. Neste trabalho, com o objetivo de se obter uma solução sem a necessidade do cálculo de autovalores e autovetores, apresenta-se uma nova solução para a equação de advecção-difusão tridimensional transiente combinando os métodos da GILTT e da Decomposição de Adomian [1]. Para tanto considera-se o problema na forma geral:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \bar{c} = \nabla \cdot (\mathbb{K} \cdot \nabla) \bar{c} - \lambda \bar{c} \quad (1)$$

sendo \bar{c} a concentração média do contaminante, $\vec{v} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ a velocidade média do vento, \mathbb{K} a matriz dos coeficientes de difusão $\mathbb{K} = \text{diag}(K_x, K_y, K_z)$ e λ a constante de decaimento radioativo. O domínio de interesse é um cubo com dimensões L_x , L_y e h , na qual h é a altura da camada limite planetária e a fonte de emissão é aproximada por uma fonte pontual com taxa de emissão constante Q na posição $\vec{r}_s = (0, y_0, H_s)$. A equação (1) está sujeita as condições de contorno de fluxo nulo nas faces do cubo, concentração inicial nula (em $t = 0$) e condição de fonte $\bar{u} \bar{c}(0, y, z, t) = Q \delta(y - y_0) \delta(z - H_s)$.

*bolsista de doutorado CAPES

Para resolver o problema proposto, aplica-se o método espectral na variável y , transformando a equação (1) em um sistema de equações advectivas-difusivas bidimensionais transientes, que são resolvidas pela técnica GILTT. Para tanto, aplica-se a transformada de Laplace na variável temporal resultando num problema estacionário bidimensional. Aplicando novamente o método espectral, agora na variável z , obtém-se uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, dada por $Y'(x, r) + FY(x, r) = 0$. Utiliza-se a ideia do método da Decomposição para expandir a concentração transformada em uma série truncada, $Y(x, r) = \sum_{p=0}^P Y_p(x, r)$, que substituída na equação de advecção-difusão transformada resulta num sistema recursivo de equações diferenciais de primeira ordem com coeficientes constantes

$$Y_0'(x, r) + DY_0(x, r) = 0 \quad e \quad Y_p'(x, r) + DY_p(x, r) = -RY_{p-1}(x, r) \quad (2)$$

onde Y_0 e Y_p são respectivamente o primeiro e o termo genérico ($p = 1 : P$) da expansão da solução em série, D é a matriz diagonal de F e R é a matriz dos termos restantes ($F = D + R$). A solução deste sistema recursivo é prontamente obtida utilizando-se soluções conhecidas para equações diferenciais matriciais de primeira ordem linear com entradas constantes.

Como um exemplo de aplicação, a solução proposta foi aplicada ao conjunto de dados do experimento de Angra dos Reis [2]. A Figura (1) apresenta o diagrama de espalhamento dos dados observados e preditos, das concentrações ao nível do solo, utilizando os modelos GILTTG e 3D-GILTT respectivamente, e a ideia aqui proposta. Um modelo ideal seria aquele cuja concentração gerada seja a mesma que a medida experimentalmente. Assim, os pontos desse gráfico estariam sobre a reta identidade. O gráfico confirma que o modelo 3D-GILTT reproduz melhor que o GILTTG as concentrações observadas.

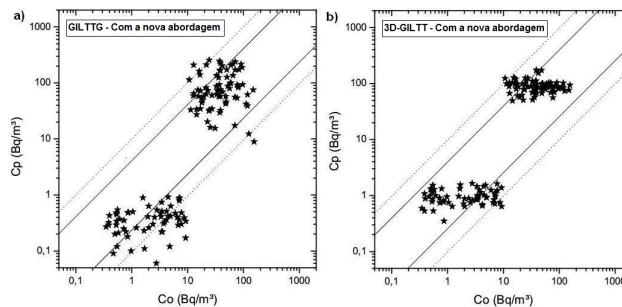


Figura 1: Gráfico de espalhamento dos dados observados experimentalmente de concentração (Co) em comparação com os resultados de concentração do modelo (Cp) para o experimento de Angra dos Reis; linhas sólidas indicam um FA2, linhas pontilhadas um FA5.

Palavras-chave: equação advecção-difusão, solução analítica, transformada de Laplace, método da Decomposição de Adomian

Referências

- [1] G. Adomian, “Solving frontier problem of physics: the decomposition method”, Kluwer, 1994.
- [2] R. Biagio, G. Godoy, I. Nicoli, P. Thomas “First atmospheric diffusion experiment campaign at the Angra site”, Tech. Report KfK 3936, Karlsruhe and CNEM 1201, Rio de Janeiro, 1985.
- [3] D. Buske, M. T. Vilhena, T. Tirabassi, B. Bodmann, Air pollution steady-state advection-diffusion equation: the general three-dimensional solution, *Journal of Envir. Protec.*,4 (2012) 1-10.
- [4] D. Moreira, M. T. Vilhena, D. Buske, T. Tirabassi, The state-of-art of the GILTT method to simulate pollutant dispersion in the atmosphere, *Atmospheric Research*,92 (2009) 1-17.
- [5] J. H. Seinfeld, S. N. Pandis “Atmospheric chemistry and physics of air pollution”, John Wiley & Sons, New York 1997.