Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Solução Analítica do Problema de Impacto em Barras Viscoelásticas

Carlos Friedrich Loeffler **Pedro V. M. Pereira** **Abraão L. C. Frossard**
Universidade Federal do Espirito Santo, Departamento de Engenharia Mecânica
29075-910, Vitoria, ES
E-mail: carlosloeffler@bol.com.br
E-mail: eng.pedrompereira@gmail.com
E-mail: abraaocaldas@hotmail.com

RESUMO

Normalmente nos projetos rotineiros de engenharia costuma-se trabalhar com materiais que apresentam um comportamento mecânico constitutivo independente do tempo. No entanto, com a evolução dos materiais e a inclusão de polímeros dentre os materiais usados na construção em engenharia, tornou-se importante incluir o efeito da dependência do tempo no comportamento destes materiais quando submetidos a uma dada carga. Entre os muitos efeitos, encontram-se os efeitos viscosos de relaxação, fluência e deslizamento. Por outro lado, muitos problemas da engenharia moderna envolvem carregamentos dinâmicos, de modo que os modelos matemáticos resultantes são complexos por acoplar simultaneamente o caráter dependente do tempo da resposta e do material constitutivo. Para resolvê-los, métodos numéricos discretos têm sido desenvolvidos, com formulações específicas para a sua abordagem, o que requer soluções analíticas para melhor aferição da qualidade de seus resultados. Com o intuito de gerar tais soluções de referência, este trabalho apresenta a solução analítica de uma barra visco elástica sujeita a uma carga de impacto, através do tradicional Método de Separação de Variáveis.

Para construção do modelo matemático considera-se um sólido de Maxwell adaptado [4], em que uma mola e amortecedor em série (Modelo de Maxwell) estão em paralelo com uma mola auxiliar, conforme apresenta a figura 1:

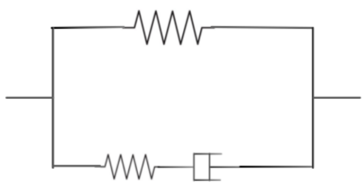

Figura 1: Modelo de Maxwell adaptado

Neste caso, a equação que relaciona tensão e deformação é dada por [3]:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = E^{*}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\sigma}{\tau} \qquad Eq.\,1$$

Onde E* é o módulo de elasticidade resultante das molas, σ é a tensão inicialmente aplicadas, τ é o tempo de relaxamento do material e u representa o deslocamento ao longo da direção x. A segunda lei de Newton neste caso é expressa por [1]:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad Eq.\,2$$

Compondo estas duas equações, a equação diferencial parcial que governa a propagação de ondas axiais é representada por:

$$\rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - E^* \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad Eq. 3$$

Ressalta-se que neste modelo o comportamento elástico e dissipativo estão em paralelo. A solução desta equação pode ser obtida considerando-se que:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E^* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\tau} \frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \qquad Eq. 4$$

O valor de gama é retirado da análise das condições de segunda derivada no tempo e depende das propriedades viscoelásticas do material.

A solução é obtida através do Método de Separação de Variáveis [2] pode-se resolver a equação anterior considerando-se que a constante apresentada no lado direito da igualdade comporta-se como uma ação de domínio. Admitindo que o sistema consista de uma barra engastada numa extremidade, a solução pelo citado método fornece:

$$\begin{aligned} \gamma(x,t) = {} & \frac{\gamma}{2}x^2 - \gamma l x \qquad Eq. 5 \\ & + e^{\frac{-\rho t}{\tau}} \left[\left(\sum_{n=1,5,9}^{\infty} \left(\frac{16\gamma l^2}{n^3 \pi^3} \right) sen\left(\frac{n\pi x}{2l} \right) cos(\omega_n t) \right) \right. \\ & \left. + \left(\sum_{n=3,7,11}^{\infty} \left(\frac{16\gamma l^2}{n^3 \pi^3} \right) sen\left(\frac{n\pi x}{2l} \right) cos(\omega_n t) \right) \right] \end{aligned}$$

A representação gráfica dos deslocamentos ao longo do tempo é similar ao de um problema de impacto amortecido.

Palavras-chave: *Materiais visco elásticos, Método de Separação de Variáveis, Soluções Analíticas de Referência, Modelo de Maxwell adaptado.*

Referências

[1] R. M. Caddell, "Deformation and Fracture of Solids", Prentice-Hall, 1980.

[2] R. C. Juvinall, "Engineering Considerations of Stress, Strain and Strength", McGraw-hill, 1967.

[3] H. Kolsky, "Stress Waves in Solids", Dover, 1963.

[4] E. Kreiszig, Matematica Superior, vol 3, Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1976.

