

# SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UMA BOLHA DE SEPARAÇÃO EM BORDO ARREDONDADO

## UTILIZANDO EQUAÇÕES MÉDIAS DE REYNOLDS

WENDEL RODRIGUES MIRANDA, EDSON DIAS NASCIMENTO JUNIOR, ANDRÉ LUIZ TENÓRIO REZENDE

*Departamento de Engenharia Mecânica, IME  
CEP 22290-270, Rio de Janeiro, RJ, BRASIL*

*E-mails:* [eng.wndl@gmail.com](mailto:eng.wndl@gmail.com), [arezende@ime.eb.br](mailto:arezende@ime.eb.br)

**Abstract** — The objective of this research is to study the formation of a separation bubble over a 2D half-body by Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) simulation. This numerical simulation technique uses a reduced computational data and has been adopted for most practical engineering problems, since the design of such applications relies on the steady state flow and average velocity field. The main purpose is to analyze the flow dynamics of the recirculation bubble for dimensionless parameter  $\eta = R/H$  (ratio of rounded radius and body height). One case is investigated, corresponding to  $\eta = 0.25$ . The Reynolds number, based on the free-stream velocity  $U_\infty$  and the height of the obstacle  $H$ , is equal to  $Re = 2000$ . The solutions obtained through the Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) equations for the two-dimensional steady state flow uses the Spalart-Allmaras and SST (Shear Stress Transport)  $\kappa-\omega$  models. These RANS models assume isotropic modeling of the Reynolds tensor. The results are compared with computational data.

**Keywords** — Separation bubble, Reynolds Averaged Navier-Stokes simulation (RANS), Reattachment.

**Resumo** — O objetivo desta pesquisa é estudar a formação de uma bolha de separação sobre um meio-corpo bidimensional através da simulação computacional baseado nas equações médias de Reynolds (Reynolds AverageNavier-Stokes - RANS). Essa técnica de simulação numérica usa um esforço computacional reduzido e tem sido adotado na maioria dos problemas práticos de engenharia, uma vez que tais aplicações dependem exclusivamente do escoamento em regime permanente e do campo de velocidade média. O objetivo principal é analisar a dinâmica do escoamento da bolha de recirculação para o parâmetro adimensional  $\eta = R/H$  (razão entre o canto arredondado do corpo e sua altura). Apenas um caso será investigado, correspondendo a  $\eta = 0,25$ . O número de Reynolds, baseado na velocidade de escoamento livre  $U_\infty$  e o comprimento característico  $L$ , que no nosso caso é a própria altura  $H$ , é igual a  $Re = 2000$ . As soluções obtidas através das equações médias de Reynolds (RANS) para o escoamento bidimensional e estacionário utilizaram os modelos de turbulência  $\kappa-\omega$  e SST (Shear Stress Transport). Esses modelos RANS assumem uma modelagem isotrópica do tensor de Reynolds. Os resultados foram comparados com dados computacionais.

**Palavras-chave** — Bolha de separação, Equações médias de Reynolds (Reynolds AverageNavier-Stokes - RANS), recolamento.

## 1 Introdução

Em muitas situações práticas de engenharia, a separação do escoamento é desencadeada por uma borda fina. No contexto de corpos robustos, as bordas podem ser vantajosamente suavizadas para melhorar as características aerodinâmicas do corpo bem como controlar a produção de vibrações e ruídos. Apesar do conhecimento prático deste tipo de influência (especialmente na indústria automobilística), não há um entendimento claro dos mecanismos físicos nas alterações resultantes da separação do escoamento dependente da forma da borda. Nesse trabalho, o objetivo é estudar a formação de uma bolha de separação considerando uma configuração genérica onde o escoamento se separa sobre um bordo arredondo. A dinâmica desse efeito será analisada através da influência sobre: (I) escoamento médio (as características da formação da bolha de separação), (II) a produção da energia turbulenta, (III) os efeitos com relação a perturbações na velocidade de escoamento livre. (Lamballais *et al*, 2010).

## 2 Modelo matemático

A abordagem das equações médias de Reynolds é baseada na decomposição da velocidade em  $u = \bar{u} + u'$ , onde  $u$  é soma do vetor velocidade média  $\bar{u}$  com o vetor flutuante da velocidade  $u'$ . As equações médias da continuidade e do momento (RANS), para um regime permanente e incompressível é dado por:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\bar{u}\bar{u}) = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) + v\nabla^2 + \nabla \cdot (-\bar{u}'\bar{u}') \quad (2)$$

onde:

$\rho$  = massa específica;

$v = \mu/\rho\epsilon$  a viscosidade cinemática;

$\mu$  = é a viscosidade molecular ou dinâmica;

$p$  = é a pressão.

A equação (2) tem a mesma forma da equação de Navier-Stokes, mas agora tem um termo adicionado, o termo de tensão turbulenta de Reynolds,  $-\bar{u}'\bar{u}'$ , representando a influência da flutuação no escoamento médio. Com o intuito de fechar a

equação (2), o termo tensão turbulenta de Reynolds pode ser modelado baseado na hipótese de Boussinesq, onde esse termo é obtido através da analogia com a lei de Stokes, por exemplo, a tensão é proporcional a taxa de deformação. O modelo de turbulência selecionado para investigar o presente trabalho é o modelo  $k-\omega$  SST.

## 2.1 Modelo $k-\omega$ SST

A tensão turbulenta de Reynolds é modelada como:

$$-\bar{u'u'} = v_t(\nabla \bar{u} + \nabla \bar{u})^T - \frac{2}{3}\kappa\delta \quad (3)$$

onde  $k$  é energia cinética turbulenta e  $v_t$  é a viscosidade turbulenta, na qual é definida em concordância com o tensor cisalhante de transporte (Shear-Stress Transport – SST) e o modelo  $k-\omega$  (Menter *et al.*, 1994). Esse modelo foi proposto para simulações de escoamento em aeronáutica com fortes gradientes de pressão adversos e de separação combinando o melhor dos modelos  $k-\varepsilon$  e  $k-\omega$ . Para escoamentos de camada limite, o modelo  $k-\omega$  é superior ao modelo  $k-\varepsilon$  na solução da região viscosa próxima a parede, em tem sido aplicado com sucesso em problemas envolvendo gradientes de pressão adversos. Entretanto, o modelo  $k-\omega$  requer uma condição de contorno não homogênea em  $\omega$  para escoamento livre não turbulento, e o escoamento calculado é muito sensível ao valor especificado (Menter, 1994). Foi demonstrado (Cazalbou *et al.*, 1993) que o modelo  $k-\varepsilon$  não sofre dessa deficiência.

Entretanto, o modelo SST combina uma formulação robusta e precisa do modelo  $k-\omega$  próximo da parede com a independência de escoamento livre do modelo  $k-\varepsilon$ , fora da camada limite. Para conseguir isso, o modelo  $k-\varepsilon$  é escrito em termos da taxa de dissipação específica,  $\omega$ . Então, o modelo  $k-\omega$  padrão e o modelo transformado  $k-\varepsilon$  são ambos multiplicados por uma função de base ambos os modelos são somados. Essa função de base  $F_1$  definida como zero (o que conduz ao modelo  $k-\omega$  padrão) na região interna da camada limite turbulenta e definida como uma unidade (o que conduz ao modelo  $k-\varepsilon$  padrão) na região externa da camada limite. Portanto a energia cinética turbulenta  $k$  e a taxa de dissipação específica  $\omega$  do modelo SST é dada por (Menter *et al.*, 2003):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \tilde{P}_k - \beta^* \kappa \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + \sigma_k v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} &= \alpha S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + \sigma_k v_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \\ &(1 - F_1) 2\sigma_d \frac{1}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (5)$$

O último termo no lado direito da equação (5) é conhecido como termo difusivo cruzado. Menter

(1992) demonstrou que introduzindo esse termo difusivo cruzado na equação de  $\omega$ , a dependência de escoamento livre do modelo  $k-\omega$  é reduzida. O efeito principal do termo difusivo cruzado no escoamento livre de cisalhamento é aumentar a produção de  $\omega$ , com o consequente aumento de  $k$ . Na equação (5) o termo difusivo cruzado é multiplicado pela função base  $F_1$  com base na distância até a parede mais próxima. Como explicado previamente,  $F_1$  é igual a zero na região distante (modelo  $k-\varepsilon$ ), e alterada para 1 sobre a região dentro da camada limite (modelo  $k-\omega$ ). A função base é definida como:

$$F_1 = \tanh(arg_1^4) \quad (6)$$

$$arg_1 = \min \left[ \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500v}{y^2 \omega} \right); \frac{4\rho \sigma \omega^2 k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \quad (7)$$

Onde  $y$  é a distância até a superfície mais próxima e  $CD_{k\omega}$  é a porção positiva do termo difusivo cruzado, dado por:

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2\rho \sigma_d \frac{1}{\omega} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-10} \right) \quad (8)$$

A definição de viscosidade turbulenta parasita fornece um melhor tratamento do transporte da tensão cisalhante em camadas limites com gradientes de pressão adversos. Essa definição é baseada na hipótese de Bradshaw que em um escoamento de camada limite a tensão cisalhante de Reynolds é proporcional a energia cinética turbulenta. A viscosidade turbulenta parasita é formulada como segue:

$$v_t = \frac{\alpha_1 k}{\max(\alpha_1 \omega; SF_2)} \quad (9)$$

onde  $S$  é o módulo do tensor de deformação média  $S_{ij}$ ,

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad (10)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

e  $F_2$  é a função base para a viscosidade turbulenta parasita no modelo SST, definida como:

$$F_2 = \tanh(arg_2^2) \quad (12)$$

$$arg_2 = \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500v}{y^2 \omega} \right) \quad (13)$$

No modelo SST a produção de energia cinética turbulenta é limitada para se prevenir o surgimento de turbulência em regiões de estagnação, dada como:

$$\tilde{P}_k = \min(v_t S^2; 10\beta^* k \omega) \quad (14)$$

Definimos  $\Phi$  como o conjunto de constantes para fechamento do modelo SST e  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  as constantes dos modelos  $k-\omega$  e  $k-\varepsilon$ , respectivamente. A constante  $\Phi$  é calculada conforme as constantes  $\Phi_1(k-\omega)$  e  $\Phi_2(k-\varepsilon)$  obtidas dos valores da tabela 1 abaixo:

$$\Phi = F_1\Phi_1 + (1 - F_1)\Phi_2 \quad (15)$$

Tabela 1. Coeficientes de fechamento do modelo SST.

	$\beta$	$\beta^*$	$\sigma_\kappa$	$\sigma_\omega$	$\sigma_d$	$\alpha$
$\phi_1$ (standard $\kappa-\omega$ )	0.075	0.09	0.5	0.5	0.856	5/9
$\phi_2$ (standard $\kappa-\varepsilon$ )	0.0828	0.09	1.0	0.856	0.856	0.44

### 3 Resultados

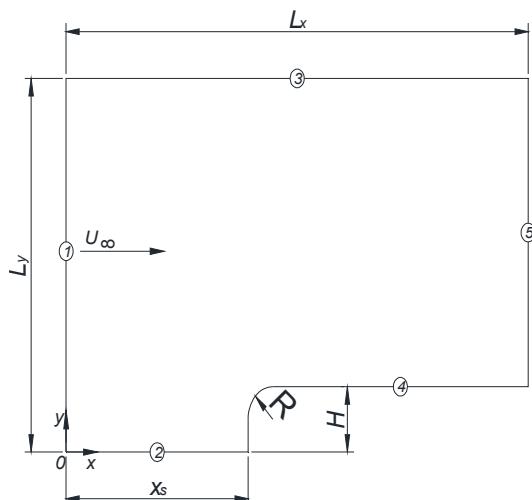


Figura 1 – Configuração do escoamento

A figura 1 mostra o escoamento sobre um corpo semi-infinito bidimensional com um degrau arredondado localizado no ponto de estagnação  $(x,y) = (x_s, 0)$ , com  $x_s = 16H$ . A geometria do corpo é definida pela sua altura  $H$  e o raio  $R$  do degrau, que dá origem ao parâmetro adimensional  $\eta = R/H$ , que para esse estudo  $\eta = 0,25$  (Coutine and Spohn, 2004). Utilizando como parâmetro de referência a velocidade de escoamento de entrada  $U_\infty$ , O número de Reynolds pode ser definido como  $R_e = U_\infty H/v$ , ( $R_e = 2000$ ) (Lamballais *et al*, 2010). Com isso o escoamento em um domínio infinito, livre de quaisquer perturbações fica definido apenas pelos parâmetros  $\eta$  e  $R_e$ .

Para o modelo RANS as condições de contorno são:

Regiões 1, 2 e 3 nomeadas de *inlet* e do tipo *velocity-inlet* velocidade de escoamento de  $(U_\infty, 0, 0)$ , intensidade turbulenta de 0, 0,1 ou 1 %  $U_\infty$ , comprimento de escala turbulenta de 25 m e pressão manométrica de escoamento de 0 Pa.

Região 4 nomeada de *plate* e do tipo *wall* com a condição de cisalhamento de não deslizamento e movimento da parede do tipo estacionário.

Região 5 nomeada de *outlet* do tipo *pressure-outlet* com intensidade turbulenta de 0, 0,1 ou 1%  $U_\infty$ , comprimento de escala turbulenta de 25 m e pressão manométrica de escoamento de 0 Pa.

O domínio computacional é dado por  $L_x \times L_y = 41,25H \times 11H$ . A malha resultante é estruturada em coordenadas cartesianas (na direção  $x$  e  $y$ ) e possui 168169 nós. A distância do primeiro nó acima do degrau foi definida como  $10^{-2}H$  ( $H$  é a altura do degrau) para garantir que  $y^+ = (\tau_s/\rho)^{0.5}y/v$  fique em torno de 1, que é o valor recomendado pelo método RANS, onde  $\tau_s$  é a tensão de cisalhamento da parede. Para eliminar os efeitos de falsa difusão optou-se por uma malha ortogonal ao escoamento (ver figura 2), ao invés da curvilínea utilizada por Yang e Voke (2001).

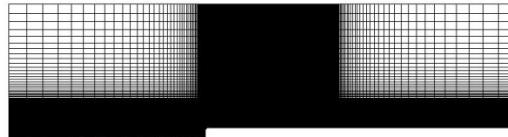


Figura 2 – Malha estruturada

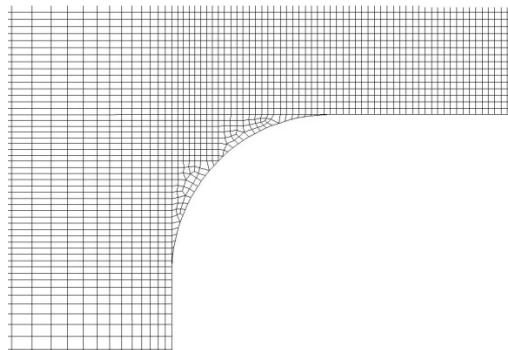


Figura 3 – Malha estruturada – região do degrau.

Na região muito próxima da curvatura optou-se por uma estruturação irregular para o fechamento da malha. Nessa mesma região foi garantida a quantidade de 20 nós igualmente espaçados pela curvatura.

À velocidade média de entrada  $U_\infty$  foram introduzidos os valores de perturbação de baixa amplitude:  $u' = 0,1\% U_\infty$  e  $1\% U_\infty$  (Lamballais *et al*, 2010) para se observar o efeito no comprimento de recolamento da bolha.

A geometria, a malha, o pré e pós-processamento do campo de escoamento foi determinado utilizando-se o software comercial ANSYS® workbench V14 com o sistema de análises Fluid Flow (Fluent) com os dois modelos descritos na seção. Esse código é baseado no Método de Volumes Finitos. As simulações foram obtidas com o

esquema SIMPLE para o acoplamento velocidade  $\times$  pressão e como discretização espacial para o momento, energia cinética turbulenta  $k$  e taxa de dissipação específica  $\omega$  o modelo QUICK (Leonard, 1979). O problema foi considerado convergido quando não houve modificação da bolha até atingir  $10^6$  iterações.

### 3.1 Comprimento de Recolamento

As tabelas de 3 a 5 a seguir mostram os comprimentos de recolamento  $L_r$  normalizados para as velocidades com os valores de perturbação  $u' = 0\% U_\infty$  e  $0,1\% U_\infty$  obtidos pelos modelos de turbulência, comparados com o trabalhos em 2D e 3D de Lamballais *et al*, (2010).

### 3.2 Tabelas

Tabela 2–Perturbação de  $0\% U_\infty$  e DNS 2D.

$\eta = 0.25$	$\kappa-\omega$ SST 2D	DNS 2D	ERRO %
$l_r$	6.98	3.3	111.5
$\Delta x_c / l_r$	0.42	0.56	-25.0
$\Delta x_{min}$	0.56	0.18	211.1
$U_{min}$	-0.28	-0.39	-28.2

Tabela 3 -Perturbação de  $0\% U_\infty$  e DNS 3D.

$\eta = 0.25$	$\kappa-\omega$ SST 2D	DNS 3D	ERRO %
$l_r$	6.98	7.4	-5.7
$\Delta x_c / l_r$	0.42	0.67	-37.3
$\Delta x_{min}$	0.56	2.8	-80.0
$U_{min}$	-0.28	-0.34	-28.2

Tabela 4–Perturbação de  $0,1\% U_\infty$  e DNS 2D.

$\eta = 0.25$	$\kappa-\omega$ SST 2D	DNS 2D	ERRO %
$l_r$	7.03	3.4	106.7
$\Delta x_c / l_r$	0.42	0.54	-22.2
$\Delta x_{min}$	0.56	0.17	229.4.
$U_{min}$	-0.28	-0.38	-28.2

Tabela 5 -Perturbação de  $0,1\% U_\infty$  e DNS 3D.

$\eta = 0.25$	$\kappa-\omega$ SST 2D	DNS 3D	ERRO %
$l_r$	7.03	5.8	21.2
$\Delta x_c / l_r$	0.42	0.62	-32.3
$\Delta x_{min}$	0.56	1.8	-68.9
$U_{min}$	-0.28	-0.34	-28.2

Tabela 6 -Perturbação de  $1\% U_\infty$ .

$\eta = 0.25$	$\kappa-\omega$ SST 2D
$l_r$	6.49
$\Delta x_c / l_r$	0.39
$\Delta x_{min}$	0.31
$U_{min}$	-0.28

### 3.3 Linhas de corrente médias

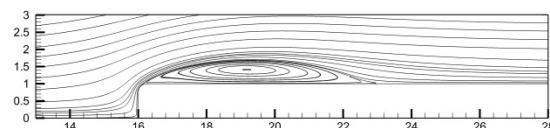


Figura 4 – Linhas de corrente médias para  $u' = 0\% U_\infty$

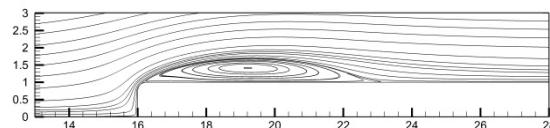


Figura 5 – Linhas de corrente médias para  $u' = 0,1\% U_\infty$

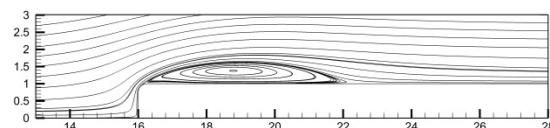


Figura 6 – Linhas de corrente médias para  $u' = 1\% U_\infty$

Os resultados do modelo  $k-w$  SST foram coerentes com os resultados 3D em DNS de Lamballais *et al* (2010). Os erros relativos foram 21,2 % e -5,7 % para as pertubações de 0,1 e 0 %  $U_\infty$ , respectivamente.

### 3.4 Contornos de energia cinética turbulenta $k$

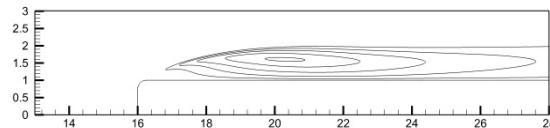


Figura 7 – Contornos da energia cinética turbulenta ( $k = 1\% U_\infty^2$  e  $u' = 0\% U_\infty$ )

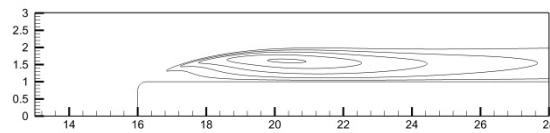


Figura 8 – Contornos da energia cinética turbulenta ( $k = 1\% U_\infty^2$  e  $u' = 0,1\% U_\infty$ )

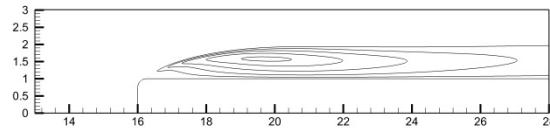


Figura 9 – Contornos da energia cinética turbulenta ( $k = 1\% U_\infty^2$  e  $u' = 1\% U_\infty$ )

### 3.5 Contornos de distribuição de pressão

A distribuição de pressão é analizada através do coeficiente de pressão definido como:

$$C_p = \frac{(p_\infty - p)}{(0.5 \rho U_\infty^2)} \quad (16)$$

onde  $p$  é a pressão estática,  $p_\infty$  e  $U_\infty$  são a pressão e a velocidade de escoamento livre.

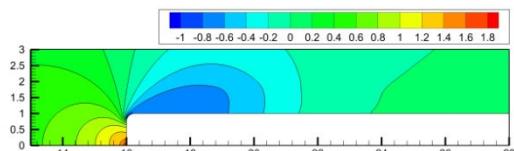


Figure 10 – Contorno de pressão. Perturbação  $u' = 1\% U_\infty$ .

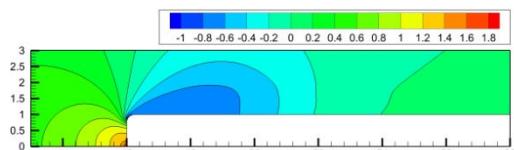


Figure 11 – Contorno de pressão. Perturbação  $u' = 0,1\% U_\infty$ .

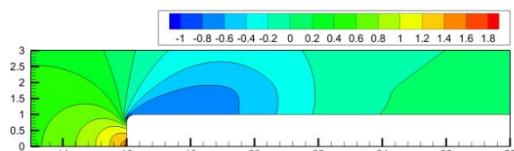


Figure 12 – Contorno de pressão. Perturbação  $u' = 0\% U_\infty$ .

A região de recirculação da bolha possui um baixo gradiente de pressão. Nessa região o perfil de velocidade é elevado. No ponto de estagnação  $x_s$  (16 H) possui um alto gradiente de pressão e baixa velocidade.

### 4 Conclusão

O objetivo deste trabalho foi estudar a formação de uma bolha de separação sobre 2D meio corpo bidimensional pela simulação em RANS

Os resultados do modelo  $k-w$  SST foram bem coerentes com os resultados 3D em DNS de Lamballais *et al* (2010).

As linhas de corrente apresentaram concordância razoável com os resultados do trabalho em comparação.

Os contornos de pressão com altos valores indicam regiões com menores velocidades. Os contornos de pressão com baixos valores indicam regiões com maiores velocidades.

A técnica de simulação numérica  $k-w$  SST requer um custo computacional reduzido e tem sido adotado na maioria dos problemas práticos de engenharia,

uma vez que tais aplicações dependam exclusivamente do escoamento em regime permanente e do campo de velocidade média. Não há restrição para baixos números de Reynolds.

A visualização da transição tridimensional incentiva a investigação com modelos mais exigentes como o LES (*Large Eddy Simulation*).

### 5 Agradecimentos

Os autores agradecem ao suporte recebido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior CAPES.

### 6 Referências Bibliográficas

- ANSYS CFX-Solver Theory Guide, v. 10, 2006, Ansys Inc.
- Araújo, F., Rezende, A.L.T., Nieckele, A.O., (2011). “Influence of the Angle of Attack on the leading Edge Bubble in a Flow over a Thin Flat Plate” 21<sup>st</sup> International Congress of Mechanical Engineering COBEM 2011.
- Cazalbou, J.B., Spalart, P.R., Bradshaw, P., 1993, “On the Behavior of 2-Equation Models at the Edge of a Turbulent Region”, Physics of Fluids, Vol. 6, No. 5, pp. 1797-1804. DOI: [10.1063/1.868241](https://doi.org/10.1063/1.868241)
- Courtine, S., Spohn, A. (2003). “Formation of Separation Bubbles on Rounded” in *Proceedings of PSFVIP-4 F4021*
- Courtine, S., Spohn, A. (2004). Dynamics of separation bubbles formed on rounded edges. In: 12<sup>th</sup> International Symposium on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics. Lisbon, Portugal.
- Fluent User’s Guide, v. 6.2, 2006, Fluent Inc., New Hampshire.
- Lamballais, E., Silvestrini, J., Laizet, S. (2008). “Direct Numerical Simulation of a Separation Bubble on a Rounded Finite-Width Leading Edge”. International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 29, No. 3, pp. 612-625. DOI: [10.1016/j.ijheatfluidflow.2008.03.006](https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2008.03.006)
- Lamballais, E., Silvestrini, J., Laizet, S. (2009). “Influence of Rounded Leading Edge on the Flow Separation BY DNS”. 20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering COBEM 2009.
- Lamballais, E., Silvestrini, J., Laizet, S. (2010). “Direct Numerical Simulation of Flow Separation Behind a Rounded Leading Edge: Study of Curvature Effects”. International Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 31, pp. 295-306. DOI: [10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.12.007](https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2009.12.007)
- Menter, F. R., 1992, “Influence of Free Stream Values on  $k-\omega$  Turbulence Model Predictions”, AIAA Journal, Vol. 30, No. 6, pp. 1657-1659. DOI: [10.2514/3.11115](https://doi.org/10.2514/3.11115)
- Menter, F. R., Kuntz, M., Langtry, R., 2003, “Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model”, Proceedings of the 4<sup>th</sup>

- International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer, pp. 625-632.
- Rezende, A.L.T., Nieckele, A.O., (2007). "Prediction of the Flow Over a Thin Flat Plate at Shallow Incidence" 19<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering COBEM 2007.
- Spalart, P., Allmaras, S., 1992, "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows", Technical Report AIAA-92-0439, American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- Yang Z. & Voke P.R.(2001). "Large-eddy simulation of boundary-layer separation and transition at a change of surface curvature" in Journal of Fluid Mechanic, pp. 305-333.