Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 1, 2015.
Trabalho apresentado no XXXV CNMAC, Natal-RN, 2014.

Comportamento Inesperado da Derivada Fracionária de Caputo

Arianne Vellasco, **Najla Varalta**,
Depto. de Bioestatística, IBB, UNESP,
18618-970 - Botucatu, SP
E-mail: ariannevellasco@gmail.com, najla@ibb.unesp.br,

Rubens de Figueiredo Camargo,
UNESP - Depto. de Matemática
Campus Bauru
17033-360, Bauru, SP
E-mail: rubens@fc.unesp.br.

Resumo: *Neste trabalho, com o intuito de analisar a modelagem feita com equações diferenciais fracionárias no sentido de Caputo, analisamos, a partir da generalização fracionária do oscilador harmônico fracionário e da primeira equação diferencial de Malthus, o comportamento da derivada fracionária de Caputo com ordem* $0 < \alpha \leq 1$ *e com ordem* $1 < \beta \leq 2$. *Um comportamento, em princípio, inesperado das soluções é discutido. Por fim, analisamos a eventual aplicabilidade desta análise para interpretar fisicamente a derivada fracionária.*

Palavras-chave: *Derivada Fracionária de Caputo, Modelagem Fracionária, Cálculo Fracionário, Oscilador Harmônico Fracionário, Equação Diferencial de Malthus.*

1 Introdução

Obter uma equação diferencial cuja solução descreva bem a realidade, traz consigo uma enorme dificuldade, uma vez que quanto mais próximos estamos de descrever perfeitamente um problema real maiores costumam ser o número de variáveis envolvidas e a complexidade das equações.

Neste sentido, o cálculo de ordem não-inteira, tradicionalmente conhecido como fracionário[1], que é o ramo da matemática que se dedica ao estudo de integrais e derivadas de ordens não inteiras, vem desempenhado um papel de grande destaque. São inúmeros os problemas que, quando descritos em termos de equações diferenciais de ordem não inteira, oferecem uma descrição mais precisa da realidade [2, 3, 4, 5, 9, 10]. Têm destaque os fenômenos que possuem dependência temporal, uma vez que as derivadas fracionárias são operadores não locais, que descrevem com grande precisão os assim chamados efeitos de memória [3, 9].

A forma usual de se utilizar a modelagem fracionária consiste em substituir a derivada de ordem inteira, presente na equação diferencial do modelo estudado, por uma derivada fracionária, normalmente de ordem menor que ou igual a do modelo, de forma que a solução inteira seja recuperada como caso particular [3]. Este procedimento foi recentemente utilizado para generalizar a conhecida equação logística de Pierre François Verhulst [13]. Verificou-se que a solução da correspondente versão fracionária descreve com maior precisão o crescimento de determinados tipos de tumor de câncer [12].

Provavelmente, o exemplo mais conhecido da eficiência deste processo seja o do oscilador harmônico fracionário [6]. De fato, ao substituir a derivada de ordem dois, presente no modelo

[1]De fato, o nome cálculo fracionário não é o mais preciso já que a derivada pode ser de ordem real e até mesmo complexa, entretanto por tradição este nome ainda é o mais utilizado.

do oscilador harmônico simples, por uma derivada fracionária de Caputo com ordem $1 < \alpha \le 2$ obtemos como resposta o oscilador harmônico amortecido [11]. A interpretação física usualmente dada para este fato é que os diferentes atritos presentes no sistema levam à uma diminuição na taxa de variação, desta forma ao considerar o valor da ordem da taxa de variação como sendo um número entre um e dois, estaríamos embutindo na ordem da derivada todos os atritos do sistema, consequentemente, para modelar com maior precisão um movimento harmônico ao invés de determinar cada um dos coeficientes de atrito presentes no sistema, bastaria determinar qual é a ordem da derivada que mais se adequa.

No presente trabalho, após introduzir alguns conceitos e resultados preliminares apresentamos o oscilador harmônico fracionário e, seguindo a mesma lógica e interpretação física da derivada fracionária, resolvemos a equação diferencial de Malthus [13], do crescimento de uma população em um ambiente ideal. Mostramos que o resultado obtido no caso do oscilador harmônico condiz com a intuição usual, mas que o mesmo não ocorre com o modelo exponencial e analisamos uma possível contribuição para a interpretação física da derivada fracionária, mais especificamente, verificamos a diferença entre *valor da ordem da taxa de variação* e o *valor da taxa de variação.*

2 Conceitos Preliminares

Nesta seção vamos utilizar a generalização do conceito de fatorial, feito através da função gama, para introduzir a integral fracionária de Riemann-Liouville [3].

2.1 Função Gel'fand-Shilov

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e ν um número não-inteiro, definimos a função $Gel'fand - Shilov$ como:

$$\phi_n(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \ge 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \phi_\nu(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \ge 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Assim, a transformada de Laplace é expressa por:

$$\mathfrak{L}[\phi_\nu(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty e^{-a}\left(\frac{a}{s}\right)^{\nu-1}\frac{\mathrm{d}a}{s} = \frac{s^{-\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_0^\infty e^{-a}a^{\nu-1}\mathrm{d}a = s^{-\nu}, \tag{1}$$

na qual a segunda igualdade é devida a mudança de variável ($st = a$) e a última igualdade à definição da função gama [7].

2.2 Funções de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler, conforme introduzidas por Mittag-Leffler em 1903 [8], é uma função complexa, dependendo de um parâmetro complexo dada por:

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+1)}, \quad z \in \mathbb{C} \ \text{ e } \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{2}$$

Claramente, para $\alpha = 1$ recuperamos a função exponencial, isto é, $E_1(z) = \mathrm{e}^x$. Uma generalização da função de Mittag-Leffler, com dois parâmetros, foi proposta por Wiman em 1905 [14] da seguinte forma:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}, \quad z \in \mathbb{C} \ \text{ e } \mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0. \tag{3}$$

A transformada de Laplace da função $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)$, é dada por:

$$\mathfrak{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\pm at^\alpha)\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp a}. \tag{4}$$

2.3 Integral Fracionária

Definimos a integral fracionária de Riemann-Liouville através da função Gama, função esta que é uma generalização do conceito de fatorial.
Definição: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Denotamos o *Operador Integral* I e I^n de ordens 1 e n respectivamente como[2]:

$$If(t) = \int_0^t f(t_1)\,\mathrm{d}t_1 \qquad \text{e} \qquad I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t_{n-1} \ldots \mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1.$$

Teorema: Para $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável, definimos a Integral de ordem n como produto de Convolução, do seguinte modo:

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) = \int_0^t \phi_n(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

na qual denotamos por $*$ o produto de convolução e $\phi_n(t)$ a função Gel'fand-Shilov.
Definição: Seja $f(t)$ uma função integrável, a integral de ordem fracionária ν de $f(t)$ segundo Riemann-Liouville, denotada por $I^\nu f(t)$, é expressa por:

$$I^\nu f(t) = \phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{6}$$

2.4 Derivada Fracionária de Caputo.

Segundo Caputo, a derivada de ordem arbitrária α é definida pela integral de ordem fracionária de uma derivada de ordem inteira, de forma que a lei dos expoentes seja plausível. Dessa forma, sejam $f(t)$ uma função diferenciável, $m \in \mathbb{N}$ tal que $m-1 < Re(\alpha) \le m$, temos[3]:

$$D^\alpha f(t) = I^{m-\alpha}\, D^m f(t) = \phi_{m-\alpha}(t) * D^m f(t). \tag{7}$$

2.5 Transformada de Laplace

A partir da definição de Integral de Riemann-Liouville, do teorema de convolução e da equação (7), temos que[12]

$$\mathfrak{L}[D^\alpha f(t)] = \mathfrak{L}[\phi_{m-\alpha} * D^m f(t)] = \mathfrak{L}[\Phi_{m-\alpha}(t)]\,\mathfrak{L}[D^m f(t)] = s^{\alpha-m}\,\mathfrak{L}[D^m f(t)]. \tag{8}$$

3 Oscilador Harmônico Fracionário

Nesta seção, vamos apresentar o conhecido resultado do oscilador harmônico fracionário e suas usuais interpretações físicas [11].

Iniciamos pelo oscilador harmônico usual. Sabe-se, pela segunda lei de Newton do movimento aplicado a sistemas que se repetem no tempo, que a equação

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \mu\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + k\,x(t) = g(t),$$

descreve o deslocamento (elongação) de um corpo de massa m, no tempo t, a partir da posição de equilíbrio, sujeito a uma força do tipo Hook, $-kx(t)$, a uma força de amortecimento $-\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ e a uma força externa $g(t)$, onde μ e k são constantes positivas.

[2] Também definimos, por conveniência, que $I^0 f(t) = f(t)$.
[3] Como consequência da definição, se $\alpha = m$ então $D^m = I^{m-m}\, D^m f(t) = I^0\, D^m f(t) = D^m f(t)$, isto é, a derivada usual é um caso particular.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0354

Vamos analisar o particular caso desta equação no qual não há atritos nem forças externas atuando sobre o sistema, isto é,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0, \tag{9}$$

na qual $\omega_0^2 = k/m$ e sujeito às condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$. Podemos reescrever a equação (9) da seguinte forma:

$$x(t) = x(0) + tx'(0) - \omega_0^2 \int_0^t \int_0^v x(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = x(0) + tx'(0) - \omega_0^2\, I^2 x(t). \tag{10}$$

A fim de considerar um modelo mais próximo da realidade, isto é, um modelo que envolva atritos, introduzimos o modelo fracionário com o seguinte argumento: *"a presença de atritos levará a uma diminuição na taxa de variação do espaço pelo tempo, desta forma, ao invés de introduzir na equação (9) os diferentes tipos de atrito existentes, vamos substituir a taxa de variação de ordem dois presente na equação por uma de ordem* $1 < \alpha \leq 2$ *"* [6, 11], ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}x(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = x(0) + tx'(0) - \omega^\alpha\, I^\alpha x(t), \tag{11}$$

na qual $\omega_0^2 = \omega^\alpha$. Aplicando a transformada de Laplace na última equação, utilizando a definição (6), o teorema da convolução de Laplace e a propriedade (1), podemos escrever[4]:

$$X(s) \;=\; x(0)\frac{s^{-1}}{1+\omega^\alpha\, s^{-\alpha}} + x'(0)\frac{s^{-2}}{1+\omega^\alpha\, s^{-\alpha}} \;=\; x(0)\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha+\omega^\alpha} + x'(0)\frac{s^{\alpha-2}}{s^\alpha+\omega^\alpha} \tag{12}$$

na qual $X(s)$ é a transformada de Laplace de $x(t)$. Como $x'(0) = 0$ temos, aplicando a transformada de Laplace inversa na equação anterior e utilizando a equação (4), que

$$x(t) = x_0\, E_\alpha(-\omega^\alpha\, t^\alpha). \tag{13}$$

A seguir apresentamos o comportamento gráfico da solução, considerando $x_0 = 1$ e $\omega = 1$. É

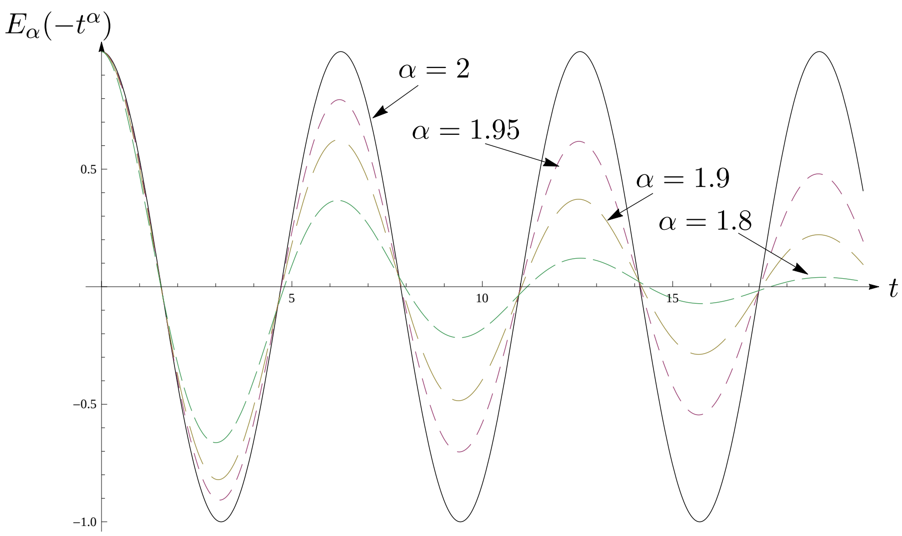

Figura 1: Gráfico de $E_\alpha(-t^\alpha)$, para valores de α, entre 1 e 2.

possível concluir, tanto pela observação do gráfico, quanto aplicando o limite $\alpha \to 2$ na equação (13), que o caso inteiro, isto é, o oscilador harmônico simples, é um caso particular da solução fracionária. De fato,

$$\lim_{\alpha\to 2} x(t) = x_0\, E_2(-\omega^\alpha\, t^\alpha) = x_0 \cos(\omega\, t).$$

[4]Como $1 < \alpha \leq 2$, temos, na equação (8), que $m = 2$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0354

4 Crescimento Exponencial de Malthus

O modelo proposto por Malthus para descrever o crescimento, em um meio ideal, de uma população com $P(t)$ indivíduos no instante t baseia-se na hipótese de que, nestas circunstâncias, *a taxa de variação do número de indivíduos será proporcional à própria população*, ou seja [12],

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(t) = kP(t) \qquad \Rightarrow \qquad P(t) = P(0)\mathrm{e}^{kt}. \tag{14}$$

Vamos introduzir a versão fracionária do modelo anterior utilizando o mesmo tipo de raciocínio feito no caso do oscilador harmônico, isto é, *"uma vez que em uma situação não ideal há uma série de fatores inibidores como, por exemplo disputa por recursos vitais, ao invés de considerar tais fatores na equação vamos levar em conta que tais fatores levam a uma diminuição na taxa de variação e substituir a derivada de ordem um presente no modelo por uma derivada de ordem* $0 < \alpha \leq 1$*"* [5], ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}P(t) = kP(t). \tag{15}$$

Aplicando a transformada de Laplace na equação anterior podemos escrever, a partir da equação (8), que

$$s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}P(0) = KF(s) \quad \Rightarrow \quad F(s) = P(0)\,\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - k}, \tag{16}$$

na qual $F(s)$ é a transformada de Laplace de $P(t)$. Aplicando a transformada de Laplace inversa e utilizando a equação (4) temos

$$P(t) = P(0)E_\alpha(k\,t^\alpha). \tag{17}$$

Apresentamos a seguir o gráfico da solução da equação (15), tomando $P(0) = 1$ e $K = 1$.

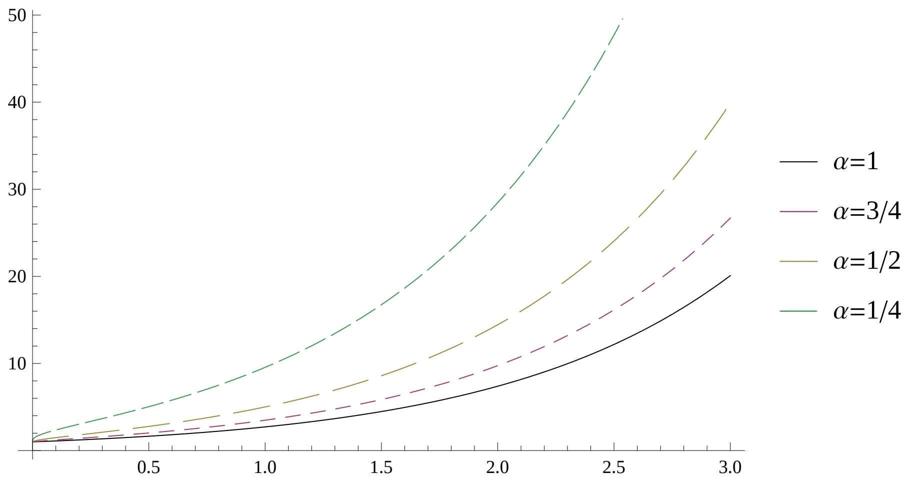

Figura 2: Gráfico de $E_\alpha(t^\alpha)$, para valores de α, entre 0 e 1.

Nota-se que quanto menor a ordem da derivada fracionária da equação (15) maior é a taxa de variação de $P(t)$, o que é um resultado diametralmente oposto ao esperado uma vez que, por nossas considerações iniciais, era esperado que o crescimento de $P(t)$ fosse menor a medida que diminuíssemos o ordem da derivada.

Uma vez que o resultado da equação (15) não foi o esperado vamos resolver a mesma equação considerando agora a ordem da derivada como sendo $1 < \beta \leq 2$, ou seja:

$$\frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}t^\beta}P(t) = kP(t). \tag{18}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0354

Aplicando a transformada de Laplace na equação anterior podemos escrever, a partir da equação (8), que

$$s^\beta F(s) - s^{\beta-1}P(0) - s^{\beta-2}P'(0) = KF(s) \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = P(0)\,\frac{s^{\beta-1}}{s^\beta - k} + P'(0)\,\frac{s^{\beta-2}}{s^\beta - k}, \quad (19)$$

na qual $F(s)$ é a transformada de Laplace de $P(t)$. Aplicando a transformada de Laplace inversa e utilizando a equação (4) temos

$$P(t) = P(0)\,E_\beta(k\,t^\beta) \,+\, P'(0)\,t\,E_{\beta,2}(k\,t^\beta). \quad (20)$$

Apresentamos a seguir o gráfico da solução da equação (18), tomando $P(0) = 1 = P'(0)$ e $K = 1$.

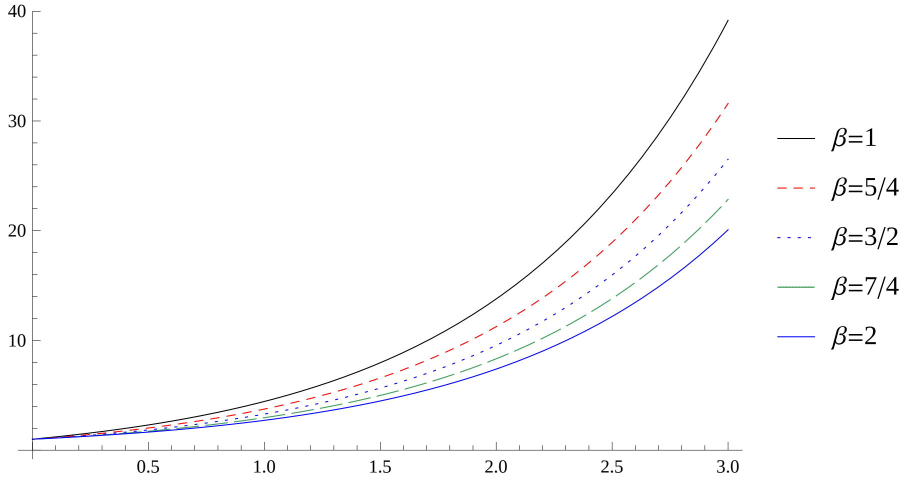

Figura 3: Gráfico de $E_\beta(t^\beta) + t\,E_{\beta,2}(k\,t^\beta)$, para valores de β, entre 1 e 2.

Nota-se que também na solução da equação (18), quanto menor a ordem da derivada fracionária maior é o crescimento de $P(t)$, contudo a solução da equação (18) parece ser mais conveniente para descrever uma situação não ideal de crescimento de uma população que a solução da equação (14).

5 Análise dos Resultados

A modelagem fracionária tem sido amplamente utilizada com o intuito de generalizar e tornar mais precisa a modelagem usual. A justificativa mais comumente encontrada para este tipo de generalização é que *"ao modelar um determinado fenômeno é comum fazer algumas simplificações, usualmente estas simplificações, se consideradas no modelo, levam a uma diminuição na taxa de variação do fenômeno, desta forma, ao invés de considerar diversos fatores na equação podemos embutir a influencia destes na ordem da derivada."*

Este tipo de argumentação mostrou-se válida para inúmeros problemas [5, 9] como, por exemplo, no caso do oscilador harmônico [11], aqui apresentado, e no caso do crescimento logístico [12]. Contudo ao analisar o modelo do crescimento exponencial verificamos um comportamento contrário, ou seja, a medida que diminuímos a ordem da taxa de variação temos um crescimento mais acentuado da população.

O presente trabalho evidencia a diferença que existe entre os conceitos de *valor da ordem da taxa de variação* e de *valor da taxa de variação.* Embora estes apresentem um comportamento similar em alguns problemas, isto não é sempre verificado. Naturalmente, este tipo de observação pode nos axiliar no entendimento da interpretação física da derivada fracionária.

6 Agradecimentos

Agradecemos aos professores Alexys Alfonso Bruno e Edmundo Capelas de Oliveira por importantes e profícuas discussões.

Referências

[1] E. Capelas de Oliveira, *Funções Especiais com Aplicações*, Editora Livrariada Física, São Paulo, (2005).

[2] R. F. Camargo, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, *On Some Fractional Green's Functions*, J. Math. Phys. **50**, 043514 (2009). [doi:10.1063/1.3119484].

[3] R. F. Camargo *Cálculo Fracionário e Aplicações*, Tese de Doutorado, Unicamp (2009).

[4] R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira e J. Vaz Jr., *On the Generalized Mittag-Leffler Function and its Application in a Fractional Telegraph Equation*, Mathematical Physics, Analysis and Geometry, **14**, 1385-0172 (2011).

[5] Debnath, *Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering*, Int. J. Math. **2003**, 3413-3442 (2003).

[6] M. Li, S. C. Lim and S. Chen, *Exact Solution of Impulse Response to a Class of Fractional Oscillators and Its Stability*, Mathematical Problems in Engineering Volume 2011 (2011).

[7] F. Mainardi and R. Gorenflo, *On Mittag-Leffler-Type Functions in Fractional Evolution Process*, J. Comput. Appl. Math., **118**, 283-299 (2000).

[8] Mittag-Lefller,G. M: Sur la nouvelle fonction $E_alpha(z)$ Comptes Rendus de l. Academie des Sciences, vol. 137, pp. 554-558, (1903).

[9] I. Podlubny, *Fractional Differential Equation - An Introduction to Fractional Derivates, Fractional Differential Equations, to Methods os their Solution and some of their Applications*, Vol. 198, Academic Press, San Diego , (1999).

[10] A. L. Soubhia, R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira, J. Vaz *Theorem for Series in Thee-Parameter Mittag-Leffler Function*, Fractional Calculus and Applied Analysis **13** (2010).

[11] G. S. Teodoro, *Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler*, tese de mestrado, Unicamp (2014).

[12] N. Varalta, A. V. Gomes, R. F. Camargo, *A prelude to the Fractional Calculus Applied to Tumor Dynamic*, (submetido) TEMA, (2014).

[13] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Correspondance mathématique et physique, 10, 113-121,(1838).

[14] A. Wiman, *Über den Fundamental Satz in der Theorie der Funktionen* $E_\alpha(x)$ (Sobre o Teorema Fundamental na Teoria das Funções $E_\alpha(x)$), Acta Math, **29**, 191-201, (1905).

DOI: 10.5540/03.2015.003.01.0354