

Recuperação do Inventário Inicial em Cadeias de Decaimento Radioativo

Guilherme G. Loch* **Joyce da S. Bevilacqua**

Depto de Matemática Aplicada, IME, USP,
Rua do Matão, 1010, CEP 05508-090, São Paulo, SP
E-mail: guiloch@ime.usp.br, joyce@ime.usp.br,

Orlando Rodrigues Jr **Goro Hiromoto**

Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares (IPEN-CNEN/SP)
Av. Professor Lineu Prestes, 2242, CEP 05508-000, São Paulo, SP
E-mail: rodrivr@ipen.br, hiromoto@ipen.br

RESUMO

O uso de técnicas nucleares baseadas em isótopos radioativos tem se mostrado cada vez mais presente em diversos campos da atividade humana. Alguns radioisótopos são naturais e existem na natureza desde a formação do planeta. Outros, por sua vez, são produzidos artificialmente em reatores nucleares e aceleradores de partículas. Através do processo de decaimento radioativo estes elementos transformam-se em outros até atingirem a estabilidade nuclear.

A modelagem mais simples para uma série de decaimentos radioativos composta por n elementos é dada por um sistema linear de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem com coeficientes constantes:

$$x'(t) = Ax(t), \quad (1)$$

onde $t \in \mathbb{R}^+$ é o tempo, A é a matriz $n \times n$ dos coeficientes composta pelas constantes de decaimento e as componentes do vetor $x(t) \in \mathbb{R}^n$ são a quantidade de cada elemento da cadeia no instante de tempo t . O uso de técnicas numéricas para resolução deste tipo de problema permite adaptações na modelagem com maior facilidade. Porém, é necessária a escolha de métodos específicos para problemas rígidos, já que é comum haver uma grande diferença nas ordens de magnitude das constantes de decaimento radiativo dos elementos da cadeia. Esta diferença faz com que algumas componentes da solução decaiam mais rapidamente do que outras, o que caracteriza a rigidez do problema [2]. O método de Rosenbrock fornece soluções precisas para problemas rígidos de decaimento nos quais os elementos da cadeia são gerados a partir de uma determinada quantidade do primeiro radionuclídeo [3].

O objetivo deste trabalho é recuperar numericamente o inventário inicial de cada elemento da cadeia conhecendo somente o instante t_j no qual é verificada a existência de uma quantidade x_i do elemento i ($1 \leq i \leq n$). Isto torna possível a obtenção de uma aproximação numérica para o inventário de todos os radionuclídeos em qualquer instante de tempo $t \in \mathbb{R}^+$.

Primeiramente, calculamos o inventário de todos os isótopos presentes na amostra no instante t_j e a partir destes valores retrocedemos ou evoluímos no tempo utilizando o método de Rosenbrock de terceira ordem e quatro estágios com estratégia de controle do passo de integração. Este cálculo é realizado com base na seguinte equação:

$$\frac{\lambda_d N_d}{\lambda_p N_p} = \frac{f T_{1/2}(p)}{T_{1/2}(p) - T_{1/2}(d)} [1 - e^{-(\lambda_d - \lambda_p)t_j}], \quad (2)$$

onde o elemento pai (p), com meia-vida $T_{1/2}(p)$ e constante de decaimento λ_p , decai a uma fração f para o elemento filho (d), que possui meia-vida $T_{1/2}(d)$ e constante de decaimento λ_d . Na Eq. (2), N_p e N_d representam o número de átomos do radionuclídeo pai e do radionuclídeo filho, respectivamente,

*Bolsista de Mestrado CNPq

e as constantes de decaimento (λ) são calculadas em função das meias-vidas ($T_{1/2}$) da seguinte forma: $\lambda = \ln(2)/T_{1/2}$ [1].

O Tecnécio-99m, elemento bastante utilizado na medicina nuclear, é gerado a partir do Molibdênio-99 cuja cadeia de decaimento (Figura 1) configura um exemplo de problema rígido [1]. Assumindo que no instante de tempo t_j existe 1 unidade do elemento de interesse da cadeia, o Tecnécio-99m, utilizamos a Eq. (2) para o cálculo da quantidade de cada isótopo radioativo presente na cadeia no instante t_j . A Tabela 1 mostra o inventário dos elementos para diferentes valores de t_j .

t_j (horas)	Molibdênio-99	Tecnécio-99m	Tecnécio-99
1	1,1399660E+02	1,0E+00	2,6641063E-01
10	1,7456500E+01	1,0E+00	2,3945327E+00
66	1,1337237E+01	1,0E+00	1,9971336E+03
100	1,1326207E+01	1,0E+00	1,0011632E+05

Tabela 1: Inventário dos elementos da cadeia do Molibdênio-99 para diferentes valores de t_j .

A partir dos valores apresentados na Tabela 1 foi possível calcularmos a quantidade de cada elemento da série para qualquer tempo $t \in \mathbb{R}^+$ com um erro inferior a uma precisão pré-fixada da ordem de 10^{-4} . A Figura 2 mostra o inventário da cadeia de decaimento do Molibdênio-99 em função do tempo para o caso em que $t_j = 10$ horas (h).

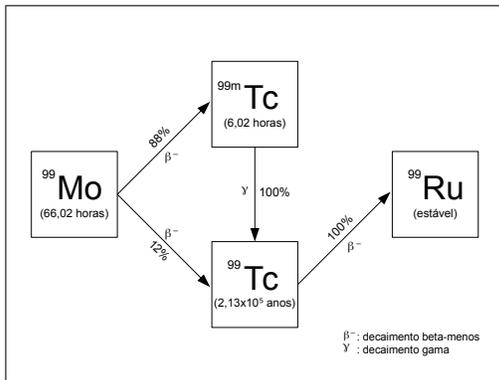


Figura 1: Cadeia de decaimento do Molibdênio-99.

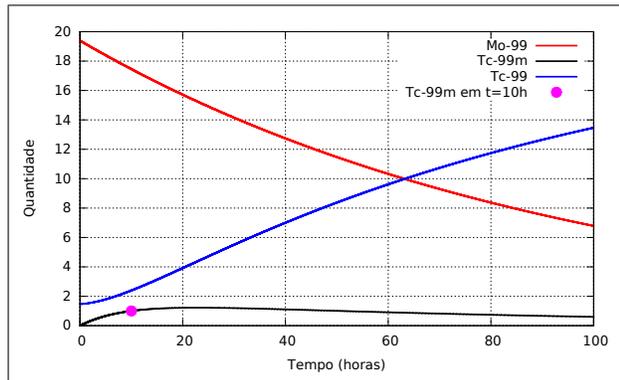


Figura 2: Inventário da cadeia de decaimento do Molibdênio-99 para o caso em que $t_j = 10$ horas.

Esta abordagem pode ser empregada na estimativa da quantidade inicial de Molibdênio-99 necessária para que seja possível a retirada periódica de uma determinada quantidade de Tecnécio-99m a ser utilizada no diagnóstico de doenças. Além disso, estas técnicas podem ser utilizadas como ferramentas de auxílio no gerenciamento de rejeitos radioativos e de situações de emergência nuclear, sendo eficientes tanto para cadeias em equilíbrio como para problemas em dinâmica nos quais ocorre a inserção ou a retirada de determinadas quantidades dos elementos da cadeia durante o processo de decaimento.

Palavras-chave: *Rosenbrock, Sistemas Rígidos, Decaimento Radioativo*

Referências

- [1] D. C. Kocher, "Radioactive Decay Data Tables: A handbook of decay data for application to radiation dosimetry and radiological assessments", DOE/TIC-I 1026, 1981.
- [2] J. D. Lambert, "Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem", John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [3] G. G. Loch, J. S. Bevilacqua, O. Rodrigues Jr, G. Hiromoto, Stiff Systems Associated with the Radioisotopes Production, trabalho apresentado no "13th International Symposium on Mathematical and Computational Biology - BIOMAT", Toronto, 2013. In press.