

## Uma aplicação interessante dos grafos de Reeb

**Erica B. Batista\***      **João Carlos Ferreira Costa**

Depto de Matemática, IBILCE, UNESP,

15054-000, São José do Rio Preto, SP

E-mail: ericabbatista@gmail.com, jcosta@ibilce.unesp.br,

### RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar o conceito de grafo de Reeb e mostrar algumas de suas aplicações. A teoria de grafos é usada de forma muito efetiva na modelagem de problemas. Tais problemas podem ter origens práticas - como é o caso dos problemas de corte e de transporte - como também apresentar aplicações puramente abstratas. Apresentaremos neste trabalho duas aplicações elegantes que utilizam os grafos de Reeb. Tais aplicações estão relacionados ao problema da classificação topológica de aplicações diferenciáveis definidas na esfera.

Dada uma superfície compacta e conexa  $M$  e uma função real diferenciável  $f$  definida em  $M$ , podemos associar um espaço quociente definido da seguinte maneira:  $(P, f(p)) \sim (Q, f(Q))$ , com  $P, Q \in M$  se, e somente se,  $f(P) = f(Q)$  e  $P$  e  $Q$  estão na mesma componente conexa de  $f^{-1}(f(P))$ . Tal espaço quociente  $M/\sim$  pode ser efetivamente codificado por uma estrutura de grafo. E em particular, no caso em que  $M = S^2$  (a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$ ) esse grafo é uma árvore. Além disso, Reeb mostrou que a estrutura do grafo depende dos pontos críticos de  $f$ .

Se  $M$  é uma superfície fechada e conexa, e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação estável, então o espaço quociente  $M/\sim$  admite uma estrutura de grafo conexo de maneira que:

1. Os vértices são as componentes conexas das curvas de nível de valores críticos que contém pontos críticos de  $f$ ;
2. Cada aresta está formada por pontos que correspondem às componentes conexas das curvas de nível de valores regulares de  $f$ .

Cada vértice do grafo  $M/\sim$  pode ser de dois tipos, podendo corresponder a uma componente conexa de uma curva de nível que contém um ponto crítico de tipo max/min ou de tipo sela.

Por último, sejam  $z_1, \dots, z_k$  em  $\mathbb{R}$  os valores críticos distintos de  $f$  tais que  $z_1 < \dots < z_k$ , então podemos etiquetar cada vértice com valores  $i \in \{1, \dots, k\}$  correspondentes aos valores críticos  $z_i$ . O grafo de Reeb clássico é definido como sendo o grafo formado a partir de  $M/\sim$  juntamente com a coloração das arestas e a etiquetagem dos vértices definidas acima.

Tais grafos têm sido extensivamente aplicados no estudo de padrões/modelos que forneçam informações topológicas dos objetos envolvidos no problema a ser estudado, seja ele da Engenharia, Computação, Matemática, Matemática Aplicada ou outras áreas afins.

Uma das aplicações que queremos apresentar, devida à V.I. Arnold [1], mostra que o grafo de Reeb associado a uma função estável definida na esfera é um invariante completo para a classificação topológica de tais funções. Motivados por este problema, apresentaremos uma versão generalizada do grafo de Reeb o qual torna-se também um invariante topológico completo mas agora para aplicações estáveis da esfera  $S^2$  tomando valores em  $S^1$  e não mais em  $\mathbb{R}$ . Este fato é crucial para entender o problema da classificação topológica das aplicações de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}^2$  com zeros isolados. Este grafo de Reeb generalizado bem como os resultados citados podem ser encontrados em [3] e [6].

\*bolsista de doutorado da CAPES

**Palavras-chave:** *Grafo de Reeb, Invariante, Aplicações, Classificação*

## Referências

- [1] V.I. Arnold, Topological classification of Morse functions and generalisations of Hilbert's 16-th problem, *Math. Phys. Anal. Geom.*, 10 (2007) 227–236.
- [2] M. Golubitsky, V. Guillemin, Stable mappings and their singularities, Graduate Texts in Mathematics 14, Springer, New York, 1973.
- [3] E.B. Batista, “Sobre a classificação topológica de aplicações de  $\mathbb{R}^3$  para  $\mathbb{R}^2$ ”, Tese de Doutorado, IBILCE/UNESP, 2014 (em preparação).
- [4] V.V. Sharko, Smooth and topological equivalence of functions on surfaces, *Ukrainian Math. J.*, 55 (2003) 832–846.
- [5] G. Sundaramoorthi, P. Petersen, S. Soatto, On the Set of Images Modulo Viewpoint and Contrast Changes, artigo submetido para publicação 2011.
- [6] E.B. Batista, J.C.F. Costa, J.J. Nuno-Ballesteros, *The Reeb graph of a map germ from  $\mathbb{R}^3$  to  $\mathbb{R}^2$  with isolated zeros*, artigo submetido para publicação 2013.