Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Simetrias e soluções de equações diferenciais envolvendo o laplaciano infinito com termo forçante não-linear

Igor Leite Freire[1]

Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

Resumo. Neste trabalho encontramos os grupos de simetrias e algumas soluções de uma equação envolvendo o operador Laplaciano infinito.

Palavras-chave. Laplaciano infinito, simetrias, soluções.

1 Introdução

Em [2], Aronsson considerou o seguinte problema: seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região convexa, $u \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(D)$ e, para cada número natural n, considere o funcional

$$I_n = \left(\int_D (u_x^2 + u_y^2)^n\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

O problema era encontrar $\min I_n$. A resposta obtida por ele próprio é que a função u que minimiza o funcional é solução da equação

$$|\nabla u|^{2(n-2)}\left[\frac{|\nabla u|^2}{2(n-1)}\Delta u + u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}\right] = 0. \tag{1}$$

Se $\nabla u \neq 0$ e fazendo $n \to \infty$ na em (1), obtemos a equação

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0. \tag{2}$$

Em [2] foram encontradas as primeiras soluções explícitas não-triviais desta equação, por exemplo, citamos a solução

$$u(x, y) = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

O operador não linear Δ_∞, aplicado a uma função u é definido por $\Delta_\infty u = u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}$ e é chamado Laplaciano infinito. A equação (2) é também conhecida como equação de Aronsson.

Em [5] foram construídas novas soluções explícitas da equação de Aronsson, tendo sido obtidas a partir dos geradores de simetrias de Lie de (2), dados pelo seguinte resultado:

[1]igor.freire@ufabc.edu.br

Teorema 1.1. *Os geradores de simetrias de Lie da Equação de Aronsson são combinações lineares dos operadores*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ X_3 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},\ X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial u},\ X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

Demonstração. Veja [5]. □

Mais recentemente, em [3] os autores consideraram alguns problemas de autovalores para a equação $\Delta_\infty u + a(x)u^3 = 0$ em $\mathbb{R}^n$. Isso nos inspira a considerarmos a seguinte equação

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} + \lambda u^p = 0, \tag{3}$$

onde λ é um número real, o qual assumimos ser não nulo.

2 Resultados principais

Seja

$$X = \xi(x,y,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,y,u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(x,y,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4}$$

um gerador de simetrias admitido por (3). Utilizando-se do pacote SYM (veja [4]), concluímos que a solução das equações determinantes satisfazem o seguinte sistema sobredeterminado de equações:

$${\xi^2}_{xx} = 0,\ \ {\xi^1}_{xx} = 0,\ \ {\xi^1}_{xy} = 0,\ \ \eta_x = 0,\ \ \eta_y = 0,\ \ \eta_{uu} = 0,\ \ {\xi^2}_u = 0$$

$${\xi^1}_u = 0,\ \ {\xi^1}_y + {\xi^2}_x = 0,\ \ {\xi^2}_y - {\xi^1}_x = 0,\ \ \lambda\left(p\eta[x,y,u] - 3u\eta_{,u} + 4u{\xi^1}_x\right) = 0.$$

Observe que as constantes λ e p não possuem, *a priori*, grandes restrições. Do ponto de vista de simetrias, isso nos conduz a um problema de *group classification*, que ocorre quando os parâmetros constitutivos da equação podem levar a diferentes grupos de simetrias.

Com respeito ao parâmetro λ, apenas duas situações ocorrem: quando $\lambda = 0$, um caso já tratado pelo Teorema 1.1, ou $\lambda \neq 0$. Dessa forma, essencialmente, devemos considerar apenas as condições sobre p. Assim, temos as seguintes situações:

- Se $p = 0$, então $\eta(x,y,u) = c_1 + 4uc_3/3$, $\xi(x,y,u) = c_2 + c_3 x - c_4 y$ e $\tau(x,y,u) = c_3 y + c_4 x + c_5$;

- Se $p = 3$, então $\eta(x,y,u) = c_1 u$, $\xi(x,y,u) = c_2 - c_3 y$ e $\tau(x,y,u) = c_3 x + c_4$;

- Se $p \neq 0, 3$, então $\eta(x,y,u) = 4c_2 u/(3-p)$, $\xi(x,y,u) = c_1 + c_2 x - c_3 y$ e $\tau(x,y,u) = c_2 y + c_3 x + c_4$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0012

Substituindo estas funções no gerador de simetria (4), provamos o seguinte

Teorema 2.1. *Seja $\lambda \neq 0$. Uma base para os geradores de simetrias de Lie da equação (3) é dada pelos seguintes operadores:*

- *Se $p = 3$, então os geradores são*

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \;\; X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \;\; X_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \tag{5}$$

e

$$X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{6}$$

- *Se $p \neq 0, 3$, então os geradores são (5) e*

$$D_p = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{4u}{3-p}\frac{\partial}{\partial u}. \tag{7}$$

- *Se $p = 0$, os geradores são (5), (7), com $p = 0$, e*

$$X_5 = \frac{\partial}{\partial u}. \tag{8}$$

Corolário 2.1. *As simetrias da equação (3) são, respectivamente, as seguintes:*

- *Para $p = 3$, temos*

$$g_1 : (x, y, u) \mapsto (x + \epsilon, y, u), \quad g_2 : (x, y, u) \mapsto (x, y + \epsilon, u),$$

$$g_3 : (x, y, u) \mapsto (x \cos\epsilon - y \sin\epsilon, x \sin\epsilon + y \cos\epsilon, u),$$

$$g_4 : (x, y, u) \mapsto (x, y, t, e^{\epsilon}u).$$

- *Se $p \neq 0, 3$, além de g_1, g_2 e g_3, temos a simetria adicional*

$$g_p : (x, y, u) \mapsto (e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}y, e^{\frac{4\epsilon}{3-p}}u).$$

- *Se $p = 0$, além de g_1, g_2, g_3 e g_0, temos a simetria adicional*

$$g_5 : (x, y, u) \mapsto (x, y, u + \epsilon).$$

Demonstração. É suficiente substituir cada gerador do Teorema 2.1 em $e^{\epsilon X}(x, y, u)$, o que resultará em seu correspondente g. □

3 Soluções da equação (3)

Ao longo desta seção consideraremos $\lambda = \sigma^2$, com $\sigma \neq 0$, em (3).
Do Teorema 2.1, temos o seguinte:

- Se $p = 3$, então os geradores de simetrias de (3) são
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \ \ X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \ \ X_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$
e
$$X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}.$$
- Se $p \neq 3$, então os geradores de simetrias de (3) são X_1, X_2 e X_3 e
$$D_p = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{4u}{3-p}\frac{\partial}{\partial u}.$$
- Se $p = 0$, então os geradores de simetrias de (3) são X_1, X_2, X_3, D_0 e
$$X_5 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

1. Consideremos a combinação linear $cX_1 + X_2$. Logo, as equações características são
$$\frac{dx}{c} = \frac{dy}{-1} = \frac{du}{0}$$
e nossos invariantes, para qualquer p, são $a_1 = x - cy$ e $u = a_2$, de onde podemos encontrar uma solução invariante da forma $u = \phi(z)$, com $z = x - cy$. Substituindo $u = \phi(z)$, $z = x - cy$, na equação (3), obtemos
$$(\phi')^3\phi'' = \frac{\sigma^2}{(c^2+1)^2}\phi^p. \tag{9}$$
Ora, colocando $\phi' = f(\phi)$, para alguma função $f = f(\phi)$, de (9) obtemos a seguinte EDO para f:
$$f^3 f' = \frac{\sigma^2}{(c^2+1)^2}\phi^p. \tag{10}$$
Aqui precisamos considerar alguns casos, a saber:
    - Suponha que $p \neq -1, 3$. Então, a solução de (10), após tomarmos a constante de integração como sendo 0, é
$$f(\phi) = k_p \phi^{\frac{p+1}{4}},$$
onde $k_p^4 := 4\sigma^2/[(c^2+1)^2(p+1)]$. Como $\phi' = f(\phi)$, temos, após integração, o seguinte:
$$\phi(z) = \left[\frac{3-p}{4}k_p z + c_1)\right]^{\frac{4}{3-p}},$$

onde c_1 é uma constante arbitrária. Dessa forma, uma solução de (3) é

$$u(x,y) = \left[\frac{3-p}{4}\sqrt[4]{\frac{4\sigma^2}{(c^2+1)^2(p+1)}}\,(x-cy)+c_1\right]^{\frac{4}{3-p}}, \tag{11}$$

onde supomos $k_p > 0$ por simplicidade.

- Considere agora o caso $p = -1$. Para este valor de p, a solução de (10) é

$$f(\phi) = \left(\frac{4\sigma^2}{(c^2+1)^2}\ln\phi + c_1\right)^{\frac{1}{4}},$$

onde c_1 é uma constante arbitrária. Como $\phi' = f(\phi)$, a solução desta última equação é dada implicitamente por

$$z + c_2 = \frac{e^{-\frac{c_1(c^2+1)^2}{4\sigma^2}}\sqrt[4]{-\frac{c_1(c^2+1)^2}{4\sigma^2}-\ln\phi}\;\Gamma(\frac{3}{4}, -\frac{c_1(c^2+1)^2}{4\sigma^2}-\ln\phi)}{\sqrt[4]{-\frac{c_1(c^2+1)^2}{4\sigma^2}-\ln\phi}} \tag{12}$$

onde $\Gamma(x;y)$ é a função gama incompleta [1].
Dessa forma, uma solução de (3) é dada de modo implícito em termos da função gama incompleta através da expressão $u(x,y) = \phi(x-cy)$, onde ϕ é definida implicitamente por (12).

- Considere agora o caso $p = 3$. Com $p = 3$ uma solução de (10) é da forma $\phi(z) = e^{k_3 z}$, o que resulta em duas soluções, dadas por

$$u_1(x,y) = e^{\sqrt{\frac{\sigma}{c^2+1}}(x-cy)} \text{ e } u_2(x,y) = e^{-\sqrt{\frac{\sigma}{c^2+1}}(x-cy)} \tag{13}$$

2. Consideremos agora o gerador X_3. Para este caso, as equações características são

$$\frac{dy}{-x} = \frac{dx}{y} = \frac{du}{0},$$

de onde obtemos os invariantes $a_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ e $u = a_2$. Definindo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $u = \phi(r)$, podemos encontrar uma solução radialmente simétrica de (3). Colocando $u = \phi(r)$, com $r = \sqrt{x^2+y^2}$, em (3), obtemos

$$(\phi')^2\phi'' = \sigma^2\phi^p. \tag{14}$$

Temos uma equação similar ao caso anterior, razão pela qual faremos nossa análise um pouco mais breve.

- Suponha que $p \neq -1, 3$. Neste caso, a solução de (14) é

$$\phi(z) = \left[\frac{3-p}{4}\sqrt[4]{\frac{4\sigma^2}{p+1}}r + c_1\right]^{\frac{4}{3-p}},$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0012

onde c_1 é uma constante arbitrária. Logo, a solução de (3) é

$$u(x,y) = \left[\frac{3-p}{4}\sqrt[4]{\frac{4\sigma^2}{p+1}}\sqrt{x^2+y^2}+c_1\right]^{\frac{4}{3-p}} \tag{15}$$

- Para $p=-1$ a solução obtida é novamente implícita, razão pela qual não a consideraremos aqui.
- Finalmente, para o caso $p=3$, as soluções são $\phi_{\pm}(r) = e^{\pm\sqrt{\sigma(x^2+y^2)}}$, de onde construímos as soluções

$$u_1(x,y) = e^{\sqrt{\sigma(x^2+y^2)}} \quad \text{e} \quad u_2(x,y) = e^{-\sqrt{\sigma(x^2+y^2)}} \tag{16}$$

da equação (3) com $p=3$.

3. Considere agora a combinação linear

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + cu\frac{\partial}{\partial u}$$

para o caso $p=3$. Nossas equações características são

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{du}{cu},$$

de onde obtemos $u/e^{cx} = a_1$, $y = a_2$, de onde podemos procurar por uma solução da forma $u(x,y) = e^{cx}\phi(y)$. Substituindo esta u em (3), obtemos a seguinte equação para ϕ:

$$(c^4-\sigma^2)\phi^3 + (\phi')^2(2c^2\phi+\phi'') = 0.$$

Assim, escolhendo a constante c como $c=\sqrt{\sigma}$ (assumamos, por simplicidade, que $\sigma > 0$), e notando que a solução $\phi = const$ só é solução da equação (3) quando $\phi = 0$, a fim de se encontrar uma solução não-trivial, temos que

$$\phi'' + 2c^2\phi = 0,$$

de onde obtemos $\phi = \cos(\sqrt{2\sigma}y)$ ou $\phi = \sin(\sqrt{2\sigma}y)$. Assim, novas soluções para (3), com $p=3$, são dadas por

$$u_1(x,y) = e^{\sqrt{\sigma}x}\cos(\sqrt{2\sigma}y) \quad \text{e} \quad u_2(x,y) = e^{\sqrt{\sigma}x}\sin(\sqrt{2\sigma}y). \tag{17}$$

4 Conclusão

Neste trabalho encontramos os grupos de simetrias da equação (3) e, a partir desses, algumas soluções clássicas daquela equação. Cabe notar aqui que o caso $p=3$, em (3), é aquele que atinge o maior número de simetrias e também admite soluções com decaimento exponencial e convergentes a 0 quando o domínio se torna ilimitado.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0012

Agradecimentos

O trabalho de I. L. Freire é financiado pela FAPESP (projeto 2014/05024-8) e CNPQ (projeto 308940/2013-6). O autor agradece aos revisores pelos comentários úteis e atenciosos, que contribuíram para uma melhor redação final do texto.

Referências

[1] G. B. Arfken, Mathematical methods for physicists, Elsevier Academic, (2005).

[2] G. Aronsson, Extension of functions satisfying Lipschitz conditions, Ark. Mat., vol. 6, 551–561, (1967).

[3] T. Bhattacharya and L. Marazzi, An eigenvalue problem for the infinity-Laplacian, Electron. J. Diff. Equ., vol. 2013, 1–30, (2013).

[4] S. Dimas and D. Tsoubelis, SYM: A new symmetry - finding package for Mathematica, The 10 th International Conference in MOdern GRoup ANalysis, 64 – 70, (2005).

[5] I. L. Freire and A. C. Faleiros, Lie point symmetries and some group invariant solutions of the quasilinear equation involving the infinity Laplacian, Nonlin. Anal. TMA, vol. 74, 3478–3486, (2011).

[6] I. L. Freire, Invariância, quantidades conservadas e soluções de equações diferenciais não-lineares, Tese de Livre-Docência, USP, (2014).

