Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução do tipo peakon para uma equação evolutiva de terceira ordem

Júlio Cesar Santos Sampaio[1]
Igor Leite Freire[2]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

Resumo Neste trabalho, mostramos que uma equação evolutiva de terceira ordem que admite a solução *Soliton*, admite também a solução do tipo *Peakon*.

Palavras-chave. Equação evolutiva, simetrias de Lie, Soliton, Peakon.

1 Introdução

Imagine que você está sentado em um parque, e que nesse parque passe um rio raso, de forma que seu comprimento seja muito maior que sua largura. Suponha que você esteja distante o suficiente para enxergar um pato nadando sobre o rio. Em um dado momento o pato para de nadar e fica boiando, o que provoca na água uma pequena onda que começa a percorrer o rio no sentido ao qual o pato estava nadando. Essa onda se mantem, aos seus olhos inalterada com respeito a velocidade, amplitude e altura. Depois de se afastar consideravelmente do pato, a onda simplesmente se dissipa. Esse fenômeno foi estudado por Russel em 1834, e posteriormente por Korteweg e seu aluno G de Vries em 1885, veja [4]. A equação que descreve tal fenômeno é dada por $u_t - uu_x - u_{xxx} = 0$ e é conhecida por equação de Korteweg-de Vries, ou simplesmente equação de KdV. A equação de KdV possui a solução

$$u(x,t) = -3\sigma \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}(x+\sigma t)\right),$$

que é chamada *soliton*.

Em um recente trabalho [5], os autores procuravam equações admitindo soluções deste tipo usando algoritmos genéticos para a busca. Eles esperavam obter, como um primeiro exemplo, a própria equação KdV. Todavia, descobriram acidentalmente a equação

$$u_t + \frac{2a}{u} u_x u_{xx} - \epsilon a u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

[1]juliocesar.santossampaio@gmail.com
[2]igor.freire@ufabc.edu.br

onde a e ϵ são contantes reais. Tal equação foi chamada de equação de SIdV (*scale invariant KdV*). Ainda em [5], os autores deduziram outras soluções para (1).

Em um trabalho recente, encontramos o grupo de simetrias da equação, veja [3]. Para maiores detalhes sobre simetrias, veja [2].

A partir dos geradores de simetrias encontramos novas soluções para (1), além de calcular algumas leis de conservação para (1) pelo método direto. Ressaltamos que as soluções encontradas são soluções clássicas.

2 Solução do tipo Peakon

Em [3], mostramos que a equação (1), quando $\epsilon < 2$, admite a solução $u_{\pm}(x,t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{c}{a(2-\epsilon)}}(x-ct)}$, onde A é uma constante. Neste trabalho mostraremos que a equação (1) também possui soluções da forma

$$u_{\pm}(x,t) = Ae^{\pm\sqrt{\frac{c}{a(2-\epsilon)}}|x-ct|}$$

que é uma solução do tipo *peakon*, que foram introduzidas em [1].

Mostraremos nesse trabalho que a equação de SIdV não apenas possui soluções do tipo *peakon*, mas também outras soluções generalizadas

Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo suporte financeiro, através do processo nº 2011/23538-0. I. L. Freire agradece à FAPESP, processo nº 2011/19089-6, e ao CNPQ, processo nº 308941/2013-6, pelo apoio financeiro.

Referências

[1] R. Camassa and D. D. Holm, An integrable shallow water equation with peaked solitons, Phys. Rev. Lett., vol. 71, 1661–1664, (1993).

[2] P. E. Hydon, Symmetry Methods for Differential Equations, Cambridge University Press, (2000).

[3] J. C. S. Sampaio and I. L. Freire, Symmetries and solutions of a third order equation, AIMS proceedings, (2015), to appear.

[4] J. C. S. Sampaio, Simetrias de Lie e leis de conservação de equações evolutivas do tipo Korteweg-de Vries, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, UFABC, (2012).

[5] A. Sen, D. P. Ahalpara, A. Thyagaraja and G. S. Krishnaswami, A KdV-like advection-dispersion equation with some remarkable properties, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., vol. 17, 4115–4124, (2012).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0014

© 2015 SBMAC