Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise do Modelo Clássico Lotka - Volterra

Anderson Inácio Salata de Abreu [1]
Elenice Weber Stiegelmeier[2]
Michele Cristina Valentino[3]

Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

Resumo. No presente trabalho será apresentado e investigado um modelo que descreve a interação entre duas espécie do tipo presa - predador, também conhecido como modelo clássico Lotka - Volterra. O objetivo deste trabalho é determinar as soluções e estudar o sistema quanto a sua estabilidade.

Palavras-chave. Modelos populacionais, sistemas de equações, presa - predador.

1 Introdução

Os modelos matemáticos de competição e predação são formulados em termos de sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias e tiveram sua origem com os trabalhos de Lotka e Volterra. Dentre os modelo de interação destaca-se o modelo clássico presa - predador também conhecido como modelo Lotka - Volterra. O modelo presa - predador trata da interação entre duas espécies onde uma delas dispõe de alimento em abundância (presa) e a segunda espécie (predador) alimenta-se exclusivamente da população de presas [2].

No presente trabalho, será discutido o modelo clássico Lotka - Volterra para duas espécies, o qual descreve um sistema do tipo presa - predador, visando determinar as soluções de equilíbrio e analisa-lo quanto a sua estabilidade.

2 Modelo Lotka - Volterra

Seja x e y as populações da presa e do predador, respectivamente, em um instante t. Para a construção do modelo de duas espécie, considere as seguintes hipóteses: i) Na ausência de predador, a população de presa aumenta exponencialmente a uma taxa proporcional a população atual (modelo de Malthus), ou seja, $dx/dt = ax$, $a > 0$, quando $y = 0$. ii) Na ausência da presa, o predador é extinto (morte por falta de alimento), assim, $dy/dt = -by$, $b > 0$, quando $x = 0$. iii) Admitindo que o encontro das duas espécies seja ao

[1] andersinacio@hotmail.com
[2] elenicew@uftpr.edu.br
[3] valentino@utfpr.edu.br

acaso e modelando o número de encontros entre presa e predador como sendo proporcional ao produto das duas populações, ou seja, usando o termo bilinear xy.

Considerando as hipóteses apresentadas, o modelo predador-presa é descrito por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - \alpha xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -by + \beta xy \end{aligned} \tag{1}$$

com α e β representam as medidas de iteração entre as duas espécies. As equações (1) são conhecidas como equações de Lotka - Volterra. Estas equações modelam a iteração entre duas espécies, onde a primeira (presa) dispõe de alimento em abundância e a segunda espécie (predador) alimenta-se da primeira.

Os pontos críticos do sistema (1) são as soluções das equações algébricas

$$\begin{aligned} x(a - \alpha y) &= 0 \\ y(-b + \beta x) &= 0. \end{aligned}$$

Nesse caso, os pontos críticos são $p_1 = (0,0)$ e $p_2 = (\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$.

Analisando o comportamento local das soluções perto de cada ponto crítico, a partir do sistema linear correspondente, pode-se concluir que a origem, p_1, é um ponto de sela e, portanto, instável, ou seja, todos as trajetórias se afastam de uma vizinhança da origem. O ponto crítico p_2 é um centro estável, assim, as trajetórias na primeiro quadrante circulam em torno do ponto crítico p_2. Essa análise pode ser feita com o auxílio do retrato de fase do sistema (1) ou do campo de direções [3].

Para vários sistemas do tipo predador-presa o modelo de Lotka - Volterra não pode ser aplicado devido as suas limitações, ou seja, descreve apenas oscilações periódicas, para corrigir este problema foram formulados outros problemas mais ricos e realístico [2].

3 Considerações finais

Nesse trabalho foi apresentado o modelo clássico de Lotka - Volterra para a interação entre duas espécies, bem como, a análise de estabilidade. Posteriormente, pretende-se estudar a aplicação de modelos do tipo presa-preador no controle biológico de populações.

Referências

[1] W. E. Boyce, R.C. Diprima, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Editora LTC, São Paulo, (1994).

[2] L. Edelstein-Keshet, Mathematical Models in Biology, Random House, New York, (1988).

[3] D. G. Figueiredo, A. F. Neves, Equações Diferenciais Aplicadas, 3 ed., IMPA, Rio de Janeiro, (2014).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0003