Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

O modelo de Malthus e Verhulst na dinâmica de populações

Renata Toncovitch das Neves [1]
Elenice Weber Stiegelmeier[2]
Michele Cristina Valentino[3]

Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

Resumo. No presente trabalho são apresentados os modelos populacionais de Malthus e Verlhust para uma espécie. O objetivo deste trabalho é estudar os modelos populacionais de Malthus e Verlhust para um espécie e então fazer a análise do comportamento assintótico de suas soluções.

Palavras-chave. Dinâmica populacional, análise de soluções, equações diferenciais ordinárias.

1 Introdução

Uma das primeiras tentativas de modelagem do crescimento populacional por meio da matemática foi feita pelo economista inglês Thomas Malthus em 1798. A idéia do modelo malthusiano é que a taxa segundo a qual a população cresce em um determinado instante é proporcional a população total naquele instante. Um pouco mais tarde, por volta de 1838, a limitação dos recursos foi estudada por Pierre Verlhust em relação ao crescimento populacional. Verlhust incorporou esta limitação ao modelo de Malthus e apresentou a equação do crescimento populacional [2].

2 Modelo de Malthus

Seja $p(t)$ a população de uma determinada espécie no instante t. A hipótese inicial diz que a taxa de variação da população p é proporcional ao valor atual de p. Malthus descreveu o crescimento populacional através da seguinte equação

$$\frac{dp}{dt} = kp, \tag{1}$$

com k taxa de crescimento da população. A solução de (1), sujeita a condição inicial $p(0) = p_0$, é dada por

$$p(t) = p_0 e^{kt}. \tag{2}$$

[1]re_toncovitch@hotmail.com
[2]elenicew@uftpr.edu.br
[3]valentino@utfpr.edu.br

onde k é determinado a partir da condição inicial. Supõe-se $k > 0$, então, a população vai crescer exponencialmente em todo tempo.

3 Modelo de Verlthust

Devido as limitações apresentadas no modelo de Malthus (1), o matemático Verlhust, apresentou uma nova equação supondo que a população irá crescer até um limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar. Substituindo a constante k em (1) por $k = a - bp$, a e b constantes positivas, obtêm-se a equação diferencial separável

$$\frac{dp}{dt} = (a - bp)p, \tag{3}$$

conhecida como a equação de Vershulst-Pearl.

3.1 Análise da solução

As funções constantes $p(t) = 0$ e $p(t) = a/b \equiv K$ são soluções de (3). Para $p_0 \neq 0$ e $p_0 \neq a/b$, sabe-se que a solução é dada por

$$p(t) = \frac{ap_0}{bp_0 + (a - bp_0)e^{-at}}. \tag{4}$$

Note, se $t \to +\infty$, então $p(t) \to K$, esse valor é chamado de população limite e é o valor assintótico da população, qualquer que seja a população inicial $p_0 > 0$. Se $p_0 > K$, a população $p(t)$ decresce exponencialmente tendendo a K. Se $0 < p_0 < K$, a população cresce tendendo a K, neste caso o gráfico de $p(t)$ é a curva logística. O ponto de inflexão está em $p(t) = \frac{a}{2b}$, ou seja, até atingir o valor $K/2$, a população cresce com derivada positiva e a partir daí o crescimento se dá mais lentamente.

4 Considerações finais

Neste trabalho foram apresentados os modelos de Malthus e Verlhust e analisados o comportamento assintótico de suas soluções. Posteriormente, tem-se como propósito fazer a análise das soluções de outros problemas populacionais clássicos via segundo método de Lyapunov [1].

Referências

[1] G. R. Bessa, Teoria de estabilidade de equações diferenciais ordinárias e aplicações: modelos presa - predador e competição entre espécies. Dissertação de mestrado em Matemática, Unesp, (2011).

[2] P. F. Verhult, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, Correspondances Mathematiques et Physiques, vol. 10, 113–121, (1838).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0009