Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Homeomorfismo e Exemplos

Caren Louize Brancaglioni[1]
Faculdade de Engenharia câmpus de Ilha Solteira, Unesp, Ilha Solteira, SP
Luis Antonio Fernandes de Oliveira[2]
Faculdade de Engenharia, câmpus de Ilha Solteira, Departamento de Matemática, UNESP, SP

Resumo. Nesse trabalho é apresentado uma parte das nossas atividades de iniciação científica. Primeiramente, a definição de Espaços Métricos e exemplos. Posteriormente estudamos uma das noções topológicas mais importantes, a saber, de Homeomorfismo. Temos dado ênfase maior para a construção de exemplos, o que será mostrado aqui.
Palavras-chave. Homeomorfismo, exemplo, homeomorfos, composta.

1 Introdução

Homeomorfismo entre espaços métricos é com certeza uma das noções topológicas mais importantes. Grosso modo, são aplicações que "preservam"a noção de distância, e tem papel semelhante aos homomorfismos de anéis, em Álgebra, ou os homomorfismos lineares entre espaços vetoriais. Tentaremos apresentar esta noção mostrando alguns exemplos.

2 Definição e exemplos

Definição 2.1. *Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} :\ N \to M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos.*

Exemplo 1: (*Projeção estereográfica*) Consideremos o conjunto $S^2 - \{(0,0,1)\}$ sendo $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1|\ x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$. Vamos encontrar a equação vetorial da reta r que passa por um ponto $(x,\ y,\ z) \in S^2 - \{(0,0,1)\}$ e por $(0,0,1)$. Assim, sendo $\lambda > 0$ e real, $r : X = (\lambda x, \lambda y, 1 + \lambda(z-1))$. Sendo o plano $\pi : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$, vamos fazer a interseção de π com r, isto é, $\pi \cap r : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, 0)\}$. Assim, $\lambda = \frac{1}{1-z}$. Portanto, temos a função $\varphi : S^2 - \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi[(x,y,z)] = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$. φ é bijetora e contínua para todo $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $(x,y,z) \in B((a,b,c),\delta) \cap S^2 - \{(0,0,1)\} \Rightarrow \varphi(x,y,0) \in B((a,b,c),\epsilon) \cap \mathbb{R}^2$. Para encontrarmos a inversa tomemos o

[1]caren.lo@hotmail.com
[2]lafo@mat.feis.unesp.br

ponto $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ e procuremos a equação da reta que passa por $(x, y, 0)$ e por $(0, 0, 1)$. Assim, seja t a reta e $\mu \in \mathbb{R}$, $t: \ X = (\mu x, \mu y, 1 - \mu)$. No entanto, sabemos que o ponto $(\mu x, \mu y, 1 - \mu) \in \ S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ então, $\mu = \frac{2}{x^2+y^2+1}$. Portanto, a função $\pi : \mathbb{R}^2 \to S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ é definida por $\pi(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right)$. Com um cálculo simples verifica-se que π é a inversa de φ já que, $(\varphi \circ \pi)(X) = X$ e $(\pi \circ \varphi)(Y) = Y$, sendo $X \in \mathbb{R}^2$ e $Y \in S^2 - \{(0, 0, 1)\}$. Visto que, π é composto por coordenadas polinomiais temos que π é contínua. Portanto, π é contínua e φ é um homeomorfismo.

Exemplo 2: Sejam os conjuntos $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $I = \{z \in \mathbb{R} | 1 \leq z \leq \ 2\} = [1; 2]$. A função $f : D \to I$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ possui o gráfico de conjunto $G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2 + 1\}$. Agora, seja a função $\varphi : D_\varphi \to S$ definida por $\varphi(x, y, 0) = (x, y, x^2 + y^2 + 1)$ com $D_\varphi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0 \ e \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) = \varphi(x, y, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2 + 1\} = G(f)$, sendo que $G(f)$ é um parabolóide. A função φ é bijetora e contínua cuja função inversa $\pi : S \subset \mathbb{R}^3 \to D_\varphi \subset \mathbb{R}^3$ é definida por $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$ sendo $z = x^2 + y^2 + 1$ e $1 \leq z \leq 2$. Verifica-se que π é a função inversa de φ pois, sendo $P = (x, y, 0)$ e $M = (x, y, z)$, $(\pi \circ \varphi)(P) = P$ e $(\varphi \circ \pi)(M) = M$. Portanto, $\pi(x, y, z)$ é a função inversa de φ e também será contínua pois, para todo $\epsilon > 0$, $\exists \ \delta > 0$ tal que $(x, y, z) \in B((a, b, c), \epsilon) \cap S \Rightarrow (x, y, z) \in B((a, b, 0), \delta) \cap D_\varphi$. Dessa forma, D_φ e S são homeomorfos e φ é um homeomorfismo.

Exemplo 3: (*Generalização*) Seja $f : X \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. Seu gráfico é o conjunto $G \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ formado pelos pontos $(x, f(x))$, com $x \in X$. O domínio X e o gráfico G da aplicação contínua f são homeomorfos.

Exemplo 4: Seja $h : S_1 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = xy + 1$. O gráfico de h será $G(h) = \{(x, y, z) \in S_1 \times \mathbb{R} | z = h(x, y, 0) \ e \ z = xy + 1\}$, sendo $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dessa forma, seja $\pi : D \to K$ definida por $\pi(x, y, 0) = (x, y, xy + 1)$, onde $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0 \ e \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) = \varphi(x, y, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = xy + 1\} = G(h)$. De acordo com o exemplo 3, $G(h)$ e D são homeomorfos, isto é, π é um homeomorfismo. Vale ressaltar que o $G(h)$ forma uma sela.

Observação 2.1. *Como composta de bijeção é bijeção, e composta de funções contínuas é contínua segue que o parabolóide é homeomorfo à cela. Isto é,* $\pi^{-1} \circ \varphi : G(h) \to G(f)$ *e* $\varphi^{-1} \circ \pi : G(f) \to G(h)$ *são homeomorfismos. Topologicamente a sela e o parabolóide são equivalentes, isto é homeomorfos.*

3 Agradecimentos

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro (Processo: 111602/2014-9 / PICME/OBMEP).

Referências

[1] E. L. Lima, Espaços Métricos, 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, (2009).

[2] E. L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Cap. 1 e Cap.2, Ao livro técnico S.A., (1970).

