Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Integral de Aumann em Escalas Temporais

Iguer L. D. Santos[1]

Departamento de Matemática, Unesp, Ilha Solteira, SP

Resumo. Neste trabalho, é introduzida a Δ-integral de Aumann. Além disso, são estabelecidas propriedades para a Δ-integral de Aumann. Em particular, é obtida uma fórmula que relaciona a Δ-integral de Aumann e a integral de Aumann.

Palavras-chave. Integral de Aumann, Escalas Temporais, Δ-Integral de Lebesgue

1 Introdução

Integrais em escalas temporais foram consideradas, por exemplo, em [5], [6] e [7]. Em [5] foi considerada a integral de McShane em escalas temporais. Já em [6] foi estudada a integral de Riemann-Stieltjes em escalas temporais. Finalmente, em [7] foi estudada a integral de Henstock-Kurzweil em escalas temporais.

A integral de Aumann foi considerada inicialmente em [1]. Em [1] são consideradas multifunções $F : [0,1] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ e a integral de Aumann é definida em termos de seleções integráveis do seguinte modo:

$$\int_{[0,1]} F(t)dt = \left\{ \int_{[0,1]} f(t)dt : f \in L_1([0,1]) \text{ e } f(t) \in F(t) \text{ para todo } t \in [0,1] \right\}.$$

Aqui é estabelecida uma extensão da integral de Aumann. Assim, utilizando a Δ-integral de Lebesgue [4] é definida a Δ-integral de Aumann. São obtidas algumas propriedades básicas para a Δ-integral de Aumann em consonância com as propriedades básicas da integral de Aumann [1]. Além disso, é estabelecida uma fórmula que relaciona a Δ-integral de Aumann e a integral de Aumann, fazendo uma analogia com a fórmula que relaciona a Δ-integral de Lebesgue e a integral de Lebesgue [[2], Theorem 5.1].

2 Preliminares

Nessa seção são considerados conceitos e resultados necessários para o estudo da Δ-integral de Aumann.

[1]iguerluis@mat.feis.unesp.br

 © 2015 SBMAC

2.1 Escala temporal

Uma escala temporal $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio e fechado. No presente trabalho é utilizada uma escala temporal $\mathbb{T}$ compacta, sendo $a = \min \mathbb{T}$ e $b = \max \mathbb{T}$ tais que $a < b$.

Defina a função $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ por

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$

Supõe-se que $\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$.

Lema 2.1 ([2])**.** *Existem $I \subset \mathbb{N}$ e $\{t_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{T}$ tal que*

$$RS := \{t \in \mathbb{T} : t < \sigma(t)\} = \{t_i\}_{i\in I}.$$

2.2 Integração de Lebesgue em escalas temporais

Em [4], pode-se encontrar a definição de um conjunto Δ-mensurável de $\mathbb{T}$. Denota-se a família de conjuntos Δ-mensuráveis de $\mathbb{T}$ por Δ. Δ é uma σ-álgebra de $\mathbb{T}$.

Uma função $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ é Δ-mensurável se para cada $r \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{t \in \mathbb{T} : f(t) < r\}$ é Δ-mensurável. Se $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ diz-se que f é Δ-mensurável se cada componente $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ de f for Δ-mensurável.

Seja $f : \mathbb{T} \to \bar{\mathbb{R}}$ e seja $E \in \Delta$. Indica-se por

$$\int_E f(s)\Delta s$$

a Δ-integral de Lebesgue de f sobre E. Se cada componente $f_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ de $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ for Δ-integrável sobre E, define-se a Δ-integral de Lebesgue de f sobre E como

$$\int_E f(s)\Delta s = \left(\int_E f_1(s)\Delta s, ..., \int_E f_n(s)\Delta s \right).$$

Denota-se por $L_1(E, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ Δ-integráveis sobre E.

Pode-se citar [2] e [8] como referências para uma abordagem mais completa da teoria de integração de Lebesgue em escalas temporais.

Dada uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$, define-se $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ como

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \in \mathbb{T} \\ f(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I, \end{cases}$$

onde $I \subset \mathbb{N}$ e $\{t_i\}_{i\in I} = RS$.

Se $E \subset \mathbb{T}$, defina

$$\tilde{E} = E \cup \bigcup_{i \in I_E} (t_i, \sigma(t_i))$$

onde

$$I_E := \{i \in I : t_i \in E \cap RS\}.$$

De [2] segue os dois resultados a seguir.

 © 2015 SBMAC

Proposição 2.1. *Tome uma função $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Então f é Δ-mensurável se, e somente se, $\tilde{f}$ é Lebesgue mensurável.*

Teorema 2.1. *Seja $E \in \Delta$ tal que $b \notin E$. Então, $f \in L_1(E, \mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $\tilde{f} \in L_1(\tilde{E}, \mathbb{R}^n)$. Neste caso,*

$$\int_E f(s)\Delta s = \int_{\tilde{E}} \tilde{f}(s)ds.$$

2.3 Multifunções mensuráveis

Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ um espaço mensurável. A multifunção $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{F}$-mensurável se o conjunto

$$\Gamma^{-1}(V) = \{x \in \Omega : \Gamma(x) \cap V \neq \emptyset\}$$

for $\mathcal{F}$-mensurável para cada conjunto compacto $V \subset \mathbb{R}^n$.

Uma função $\gamma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma seleção da multifunção Γ quando $\gamma(x) \in \Gamma(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Diz-se que a multifunção Γ é fechada, compacta, convexa ou não-vazia quando $\Gamma(x)$ satisfaz a propriedade exigida para cada $x \in \Omega$.

Teorema 2.2 ([3])**.** *Tome um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{F})$ e uma multifunção $\Gamma : \Omega \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ não-vazia e fechada. Se Γ é $\mathcal{F}$-mensurável então Γ admite uma seleção mensurável.*

3 Δ-Integral de Aumann

Se A é um subconjunto de $\mathbb{R}$, denota-se por $A_\mathbb{T}$ o conjunto $A \cap \mathbb{T}$.

Seja $F : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não-vazia. Seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ Δ-integráveis sobre $[a, b)_\mathbb{T}$ tal que $f(t) \in F(t)$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Define-se a Δ-integral de Aumann de F sobre $[a, b)_\mathbb{T}$ como

$$\int_{[a,b)_\mathbb{T}} F(s)\Delta s = \left\{ \int_{[a,b)_\mathbb{T}} f(s)\Delta s : f \in \mathcal{F} \right\}.$$

A Δ-integral de Aumann de F sobre $[a, b)_\mathbb{T}$ é uma generalização da usual integral de Aumann de F sobre $[a, b]$.

A seguir são estabelecidas propriedades para a Δ-integral de Aumann.

Teorema 3.1. *Se $F : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ for uma multifunção não-vazia e convexa, então $\int_{[a,b)_\mathbb{T}} F(s)\Delta s$ é convexo.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Se $\alpha \in [0, 1]$, tem-se $\alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2 \in \mathcal{F}$. Logo,

$$\begin{aligned}\alpha \int_{[a,b)_\mathbb{T}} f_1(s)\Delta s + (1 - \alpha) \int_{[a,b)_\mathbb{T}} f_2(s)\Delta s \\ = \int_{[a,b)_\mathbb{T}} (\alpha f_1 + (1 - \alpha)f_2)(s)\Delta s \in \int_{[a,b)_\mathbb{T}} F(s)\Delta s\end{aligned}$$

e portanto $\int_{[a,b)_\mathbb{T}} F(s)\Delta s$ é convexo. $\square$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0007 © 2015 SBMAC

Diz-se que a multifunção $F : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ é Δ-integravelmente limitada se existe uma função $c : \mathbb{T} \to [0, +\infty)$ Δ-integrável sobre $[a, b)_{\mathbb{T}}$ de modo que $\|y\| \leq c(t)$ para todo $y \in F(t)$ e para todo $t \in \mathbb{T}$.

Teorema 3.2. *Seja $F : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não-vazia, fechada, Δ-mensurável e Δ-integravelmente limitada. Então $\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} F(s)\Delta s$ é não-vazio.*

Demonstração. Do Teorema 2.2 a multifunção F admite uma seleção Δ-mensurável f. Como F é Δ-integravelmente limitada, então f é Δ-integrável sobre $[a, b)_{\mathbb{T}}$. Assim, $f \in \mathcal{F}$ e então $\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} F(s)\Delta s$ é não-vazio. □

Dada a multifunção $F : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$, define-se a multifunção $\tilde{F} : [a, b] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ como

$$\tilde{F}(t) = \begin{cases} F(t), & t \in \mathbb{T} \\ F(t_i), & t \in (t_i, \sigma(t_i)) \text{ para algum } i \in I. \end{cases}$$

Teorema 3.3. *Considere uma multifunção $F : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ não-vazia, compacta e convexa. Então*

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} F(s)\Delta s = \int_{[a,b]} \tilde{F}(s)ds.$$

Demonstração. Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma seleção de F. Suponha que f seja Δ-integrável sobre $[a, b)_{\mathbb{T}}$. Logo a função $\tilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma seleção de $\tilde{F}$. Além disso, do Teorema 2.1 segue que

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} f(s)\Delta s = \int_{[a,b)} \tilde{f}(s)ds = \int_{[a,b]} \tilde{f}(s)ds$$

e então

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} F(s)\Delta s \subset \int_{[a,b]} \tilde{F}(s)ds.$$

Considere agora uma seleção $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de $\tilde{F}$. Suponha que g seja Lebesgue integrável sobre $[a, b]$.

Seja $A = \bigcup_{i \in I}(t_i, \sigma(t_i))$. Tem-se

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} g(s)ds = \int_{[a,b)} g(s)ds &= \int_{A \bigcup ([a,b) \setminus A)} g(s)ds \\ &= \int_A g(s)ds + \int_{[a,b) \setminus A} g(s)ds = \sum_{i \in I} \int_{(t_i, \sigma(t_i))} g(s)ds + \int_{[a,b) \setminus A} g(s)ds. \end{aligned}$$

Como F é compacta e convexa, para cada $i \in I$ existe $\beta_i \in F(t_i)$ tal que

$$\int_{(t_i, \sigma(t_i))} g(s)ds = \beta_i(\sigma(t_i) - t_i).$$

Defina a função $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ como

$$h(t) = \begin{cases} \beta_i, & \text{se } t = t_i \text{ para algum } i \in I \\ g(t), & \text{se } \sigma(t) = t. \end{cases}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0007 © 2015 SBMAC

Então

$$\int_{[a,b)} g(s)ds = \int_{[a,b)} \tilde{h}(s)ds = \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} h(s)\Delta s$$

e assim

$$\int_{[a,b]} \tilde{F}(s)ds \subset \int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} F(s)\Delta s.$$

Logo a prova está completa. □

Teorema 3.4. *Seja $F : \mathbb{T} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ uma multifunção não-vazia, compacta, convexa e Δ-integravelmente limitada. Então $\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} F(s)\Delta s$ é um conjunto compacto.*

Demonstração. De [[1], Theorem 4] o conjunto

$$\int_{[a,b]} \tilde{F}(s)ds$$

é compacto. Do Teorema 3.3 conclui-se que o conjunto

$$\int_{[a,b)_{\mathbb{T}}} F(s)\Delta s$$

é compacto. □

Referências

[1] R.J. Aumann, Integrals of set-valued functions, J. Math. Anal. Appl., vol. 12, 1–12, (1965).

[2] A. Cabada and D. R. Vivero, Expression of the Lebesgue Δ-integral on time scales as a usual Lebesgue integral: application to the calculus of Δ-antiderivatives, Math. Comput. Modelling, vol. 43, 194–207, (2006).

[3] C. Castaing and M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 580, (1977).

[4] G. S. Guseinov, Integration on time scales, J. Math. Anal. Appl., vol. 285, 107–127, (2003).

[5] D. Liu and D. Zhao, On the McShane integral on time scales, Chin. Q. J. Math., vol. 27, 556–561, (2012).

[6] D. Mozyrska, E. Pawłuszewicz and D. Torres, The Riemann-Stieltjes integral on time scales, Aust. J. Math. Anal. Appl., vol. 7, Art. 10, 14, (2010).

[7] A. Peterson and B. Thompson, Henstock-Kurzweil delta and nabla integrals, J. Math. Anal. Appl., vol. 323, 162–178, (2006).

[8] I. L. D. Santos and G. N. Silva, Absolute continuity and existence of solutions to dynamic inclusions in time scales, Math. Ann., vol. 356, 373–399, (2013).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0007 © 2015 SBMAC