Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Conjuntos Compactos: Definição e Exemplos

Livea Cichito Esteves[1]

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Unesp, Ilha Solteira, SP

Luis Antonio Fernandes Oliveira[2]

Departamento de Matemática, Unesp, Ilha Solteira, SP

Resumo. Neste trabalho, estudaremos os conjuntos compactos. Vamos definir cobertura, cobertura aberta, subcobertura e subcobertura aberta, para então ser possível definirmos os conjuntos compactos. Em seguida, veremos alguns exemplos e propriedades que este tipo de conjunto possui.

Palavras-chave. Topologia, Compacidade, Cobertura, Subcobertura.

1 Introdução

A teoria de Conjuntos Compactos é de grande importância na Matemática, pois possibilitou que Teoremas clássicos de Análise Real ganhassem versões em um contexto mais geral. Dentre as contribuições obtidas, o conceito de compacidade, propiciou o entendimento de certos fatos válidos para intervalos fechados e limitados na reta real e peculiaridades dos conjuntos compactos no âmbito dos espaços métricos e topológicos.

Em Topologia, o conceito de compacidade é uma extensão topológica das ideias de finitude e limitação.

Definição 1.1: Seja $(E, \boldsymbol{\tau})$ um espaço topológico e X um subconjunto de E. Uma cobertura de X é uma coleção $A = (A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de subconjuntos do espaço topológico E, tal que $X \subset \cup_{\lambda\in L} A_\lambda$.

Uma cobertura é dita aberta se os elementos de A são abertos em E:

$$(A_\lambda, \lambda \in \gamma; X \subset \cup_{\lambda\in\gamma} A_\lambda).$$

Definição 1.2: Seja $A = (A_\lambda)_{\lambda\in L}$ uma cobertura de X. Uma subcobertura de A é uma subcoleção $A' = (A_{\lambda'})_{\lambda'\in L'}$, $L' \subset L$, que ainda é uma cobertura de X, isto é, $X \subset \cup_{\lambda'\in L'} A'_\lambda$. [2-3]

Uma subcobertura é finita se a quantidade de subconjuntos é finita.

[1] livea_unica@hotmail.com
[2] lafo@mat.feis.unesp.br

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0004

Definição 1.3: Um subconjunto K de um espaço topológico E é dito compacto quando toda cobertura aberta de K admitir uma subcobertura finita. [3]

Dessa forma, se quisermos mostrar que um conjunto X não é compacto basta encontrar uma cobertura aberta de X que não admita subcobertura finita. Na reta real, um conjunto é compacto se e somente se, é fechado e limitado (ver Teorema de Borel-Lebesgue).

2 Exemplos

1. A reta $\mathbb{R}$ não é um conjunto compacto. Consideremos a cobertura aberta $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $A_n = (-n, n)$. Essa cobertura aberta não admite subcobertura finita, pois a união de um número finito de intervalos $(-n, n)$ é igual ao intervalo de maior índice, que nunca será igual a $\mathbb{R}$, e dessa forma $\mathbb{R}$ não estará contido nessa união. [1]

2. Se E é um espaço topológico qualquer, então cada subconjunto finito de E é compacto.

3. Se E é um espaço topológico finito, então todo subconjunto de E é compacto.

4. Se K, L são subconjuntos compactos de um espaço topológico E, então $K \cup L$ é compacto.

5. Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é necessariamente limitado.

6. Seja E um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto $K \subset E$ é fechado em E.

7. A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto. [3]

Agradecimentos

Agradeço ao professor Luis Antonio Fernandes de Oliveira pela orientação neste trabalho e ao CMAC pela oportunidade de participar deste Congresso.

Referências

[1] S. M. da Luz, Conjuntos Compactos, Trabalho de Conclusão de Curso de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, (2000).

[2] J. A. E. Dieudonné, Foundations of modern analysis, London, Academic Press, (1969).

[3] E. L. Lima, Elementos de Topologia Geral, Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S/A, (1969).

