Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Simetrias e soluções de equações diferenciais evolutivas envolvendo o laplaciano infinito

Márcio Fabiano da Silva,[1]
Igor Leite Freire,[2]
Antonio Cândido Faleiros[3]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

Resumo. Neste trabalho encontramos os grupos de simetrias e algumas soluções de uma equação envolvendo o operador Laplaciano infinito.

Palavras-chave. Laplaciano infinito, simetrias, soluções.

1 Introdução

Neste trabalho encontramos soluções da equação

$$u_t = u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}, \tag{1}$$

usando a teoria de simetrias de Lie [3, 4, 11–15]. Veja também [5, 6, 10].

Tal equação pode ser reescrita como

$$u_t = \Delta_\infty u,$$

onde Δ_∞ é um operador não-linear, o qual é definido por

$$\Delta_\infty u = u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}$$

e é chamado Laplaciano infinito. Este operador foi obtido em [2], quando Aronsson considerou o problema de minimizar o funcional

$$I_n = \left(\int_D (u_x^2 + u_y^2)^n \right)^{\frac{1}{2n}}$$

em uma região convexa $D \subseteq \mathbb{R}^2$, onde $u \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(D)$.

[1]marcio.silva@ufabc.edu.br
[2]igor.freire@ufabc.edu.br
[3]antonio.faleiros@ufabc.edu.br

Como consequência foi obtido que a função u que minimiza o funcional é solução da equação

$$|\nabla u|^{2(n-2)}\left[\frac{|\nabla u|^2}{2(n-1)}\Delta u + u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}\right] = 0. \tag{2}$$

Se $\nabla u \neq 0$ e fazendo $n \to \infty$ na em (2), obtemos a equação

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0. \tag{3}$$

2 Resultados principais

Os principais resultados relativos às simetrias de Lie são dados a seguir:

Teorema 2.1. *As simetrias de Lie da equação* (1) *admitem a seguinte base de geradores*

$$\begin{aligned} &X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \\ &X_6 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{4}$$

Corolário 2.1. *As simetrias da equação* (1) *são, respectivamente, as seguintes:*

$$g_1 : (x,y,t,u) \mapsto (x+\epsilon, y, t, u), \quad g_2 : (x,y,t,u) \mapsto (x, y+\epsilon, t, u),$$

$$g_3 : (x,y,t,u) \mapsto (x, y, t+\epsilon, u), \quad g_4 : (x,y,t,u) \mapsto (x, y, t, u+\epsilon),$$

$$g_5 : (x,y,t,u) \mapsto (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, x\sin\epsilon + y\cos\epsilon, t, u),$$

$$g_6 : (x,y,t,u) \mapsto (e^{\epsilon}x, e^{\epsilon}y, t, e^{2\epsilon}u), \quad g_7 : (x,y,t,u) \mapsto (x, y, e^{2\epsilon}t, e^{-\epsilon}u).$$

Demonstração. Basta tomar, para cada X_i do Teorema 2.1, o elemento g_i dado por $e^{\epsilon X}(x,y,t,u)$. □

Do gerador X_5 concluímos que a equação (1) é invariante sob rotações, o que nos permite considerar sua forma radial

$$u_t = u_r^2 u_{rr}, \tag{5}$$

o que significa que, conhecendo-se uma solução $u = \phi(r,t)$ de (5), então

$$u(x,y,t) = \phi(\sqrt{x^2+y^2}, t)$$

é uma solução de (4).

Uma questão natural é, então, considerar as simetrias de (5). Assim, chegamos ao

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0013

Teorema 2.2. *Os geradores de simetries de* (5) *são combinações lineares dos seguintes campos vetoriais*

$$R_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad R_2 = \frac{\partial}{\partial r}, \quad R_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad R_4 = r\frac{\partial}{\partial r} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, \quad R_5 = 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{6}$$

Corolário 2.2. *As simetrias da equação* (5) *são, respectivamente, as seguintes:*

$$g_1 : (r, t, u) \mapsto (r, t + \epsilon, u), \quad g_2 : (r, t, u) \mapsto (r + \epsilon, t, u), \quad g_3 : (r, t, u) \mapsto (r, t, u + \epsilon),$$

$$g_4 : (r, t, u) \mapsto (e^{\epsilon} r, t, u), \quad g_5 : (r, t, u) \mapsto (r, e^{2\epsilon} t, e^{-\epsilon} u).$$

Demonstração. Novamente, basta tomar, para cada R_i do Teorema 2.2, o elemento g_i dado por $e^{\epsilon X}(r, t, u)$. □

Por outro lado, também podemos empregar o método de separação de variáveis à equação (1). Dessa forma, assumindo que $u(x, y, t) = T(t)v(x, y)$, concluímos que v e T satisfazem as equações

$$v_x^2 v_{xx} + 2v_x v_y v_{xy} + v_y^2 v_{yy} = kv(x, y) \tag{7}$$

e

$$T'(t) = kT(t)^3,$$

onde $k \neq 0$ é uma constante. A solução desta última equação é

$$T(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{a - 2kt}}. \tag{8}$$

Nosso próximo resultado versa sobre as propriedades de invariância de tal equação, dado no

Teorema 2.3. *Uma base para os geradores de simetrias de Lie da equação* (7) *são dados pelos operadores*

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad V_3 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad V_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2v\frac{\partial}{\partial v}. \tag{9}$$

Corolário 2.3. *As simetrias da equação* (7) *são, respectivamente, as seguintes:*

$$g_1 : (x, y, v) \mapsto (x + \epsilon, y, v), \quad g_2 : (x, y, v) \mapsto (x, y + \epsilon, v),$$

$$g_3 : (x, y, v) \mapsto (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, x\sin\epsilon + y\cos\epsilon, v),$$

$$g_4 : (x, y, v) \mapsto (e^x x, e^6 y, e^{2\epsilon} t, ^{2\epsilon} v).$$

Demonstração. Defina, para cada V_i do Teorema 2.3, o elemento g_i dado por $e^{\epsilon X}(r, t, u)$. □

2.1 Soluções da equação (1) e suas equações derivadas

Recordando que os geradores de simetrias da equação (1) são dados por (4), a invariância com respeito a X_5 nos mostra que a equação (1) é invariante sob rotações $T_\epsilon : (x, y, u) \mapsto (x\cos\epsilon - y\sin\epsilon, x\sin\epsilon + y\cos\epsilon, u)$, o que nos permite construir uma solução do tipo radial $u = \phi(r, t)$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ou seja, se ϕ é uma solução da equação

$$u_t = u_r^2 u_{rr} \tag{10}$$

então $u = \phi(\sqrt{x^2 + y^2}, t)$ é uma solução de (1). Por esta razão, primeiro construiremos soluções de (10) para, em seguida, construir soluções de (1).

Por sua vez, recordando que os geradores de simetrias de (10) são

$$R_1 = \frac{\partial}{\partial t},\quad R_2 = \frac{\partial}{\partial r},\quad R_3 = \frac{\partial}{\partial u},\quad R_4 = r\frac{\partial}{\partial r} + 2u\frac{\partial}{\partial u},\quad R_5 = 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

encontramos as seguintes soluções:

1. Considerando o gerador R_4, concluímos que

$$v = r^2\phi(t).$$

Substituindo em (10), obtemos a seguinte EDO

$$8\phi(t)^3 - \phi'(t) = 0,$$

cujas soluções são

$$\phi_\pm(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{c - 16t}}.$$

Logo, as soluções de (10) são dadas por

$$u(r, t) = \frac{\pm r^2}{\sqrt{c - 16t}}$$

e, por consequência, temos as seguintes soluções para (1):

$$u_\pm(x, y, t) = \pm\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{c - 16t}}.$$

2. Considere o gerador R_5. Para este caso, obtemos

$$u = t^{-1/2}\phi(r).$$

Substituindo em (10) concluímos que ϕ satisfaz a equação

$$2\phi'^2\phi'' + \phi = 0,$$

cuja solução é

$$\phi(r) = \psi^{-1}(r + c_1),$$

onde ψ^{-1} é a inversa da função

$$\psi(w) = \frac{c_1}{\sqrt[4]{2}} w F_{2,1}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{c_2^4}{2} w^2\right), \tag{11}$$

onde $F_{2,1}$ é a função hipergeométrica, c_1 e c_2 são constantes.

Dessa forma, uma solução para (1), em termos da função hipergeométrica, é

$$u(x, y, t) = \frac{\psi^{-1}(c_1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{t}},$$

onde $\psi^{-1}(w)$ é dada por (11).

3. Considere agora uma combinação linear dos geradores $R_1 + cR_2$. Então concluímos que uma solução é da forma $u = \phi(z)$, onde $z = r - ct$. Substituindo esta solução em (10), obtemos

$$u(r, t) = c_2 - \frac{1}{3c}[c_1 - 2c(r - ct)]^{3/2},$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Dessa feita, uma solução para (1) é dada por

$$u(x, y, t) = c_2 - \frac{1}{3c}[c_1 - 2c(\sqrt{x^2 + y^2} - ct)]^{3/2},$$

O que faremos aqui, neste momento, é obter soluções para (1) empregando o método de separação de variáveis à equação. Assim, supondo que $u(x, y, t) = T(t)v(x, y)$, já sabemos que $T(t) = \pm\frac{1}{\sqrt{a-2kt}}$, enquanto v satisfaz a equação

$$v_x^2 v_{xx} + 2v_x v_y v_{xy} + v_y^2 v_{yy} = kv(x, y) \tag{12}$$

Como já dito, se $v = \phi(x, y)$ é uma solução de (12), então

$$u(x, y, t) = \pm\frac{\phi(x, y)}{\sqrt{a - 2kt}} \tag{13}$$

é uma solução de (1).

Uma vez que os geradores de simetrias de Lie são combinações lineares dos operadores

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial x},\ \ V_2 = \frac{\partial}{\partial y},\ \ V_3 = \frac{\partial}{\partial v},\ \ V_4 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y},\ \ V_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2v\frac{\partial}{\partial v} \tag{14}$$

podemos usar os métodos anteriores para construir algumas soluções. Primeiro obteremos uma solução para (12). A seguir, utilizando (13), encontraremos uma solução para (1).

1. Comecemos com o gerador V_4. Neste caso, nossos invariante são $z = x^2 + y^2$ e $v = \phi(z)$. Logo, ϕ é uma solução de

$$8z\phi_z^2\left(\phi_z + 2z\phi_{zz}\right) - k\phi = 0,$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0013

Novamente temos uma solução envolvendo a inversa da função hipergeométrica, dada por

$$\phi(z) = \psi^{-1}((2k)^{1/4}\sqrt{z} + c_1), \tag{15}$$

onde ψ^{-1} é a inversa de

$$\psi(w) = \frac{c_2}{2^{1/4}} w F_{2,1}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{c_2^4}{2}w^2\right), \tag{16}$$

e $F_{2,1}(a, b, c, z)$ é dada em (11). Exceto pelo fato de a constante k em (15) ser a constante de separação utilizada no método de separação de variáveis, a solução obtida aqui é essencialmente a mesma solução obtida anteriormente, utilizando-se simetria radial na equação (1).

2. Considere agora o gerador V_5. Seguindo os mesmos procedimentos, encontramos

$$v = x^2\phi(y/x)$$

onde ϕ é uma solução da equação

$$-\phi\left(-2\left(5z^2+2\right)\phi'^2 + 4z\left(z^2+1\right)\phi'\phi''\right) + \left(z^2+1\right)\phi'^2\left(\left(z^2+1\right)\phi'' - 2z\phi'\right)$$
$$+4z\phi^2\left(z\phi'' - 4\phi'\right) + 8\phi^3 - k\phi = 0.$$

Infelizmente, até o momento, não conhecemos nenhuma solução explícita para a EDO acima.

3 Conclusão

Neste trabalho encontramos os grupos de simetrias da equação (1) e, a partir desses, algumas soluções clássicas daquela equação, utilizando invariância rotacional e o método de separação de variáveis.

O Teorema 2.1 e seu corolário foram, primeiramente, mostrados em [5]. Os resultados dos teoremas 2.2 e 2.3, seus corolários e respectivas soluções são originais. O caso estacionário foi considerado em [8, 9].

Agradecimentos

O trabalho de I. L. Freire é financiado pela FAPESP (projeto 2014/05024-8) e CNPQ (projeto 308940/2013-6). Os autores agradecem aos revisores pelos comentários e sugestões, evitando que pequenas incorreções permanecessem no texto.

Referências

[1] G. B. Arfken, Mathematical methods for physicists, Elsevier Academic, (2005).

[2] G. Aronsson, Extension of functions satisfying Lipschitz conditions, Ark. Mat., vol. 6, 551–561, (1967).

[3] G. Bluman and S. Kumei, Symmetries and diffferential equations, Springer, (1989).

[4] B. J. Cantwell, Introduction to symmetry analysis, Cambridge University Press, (2002).

[5] M. F. da Silva and I. L. Freire, On the Lie point symmetries of an evolution equation involving the infinity Laplacian, Anais do CNMAC 2012, 746–750, (2012).

[6] M. F. da Silva, I. L. Freire and A. C. Faleiros, Solutions for equations obtained from a degenerated evolution equation governed by the infinity-Laplacian, (2014), submitted.

[7] S. Dimas and D. Tsoubelis, SYM: A new symmetry - finding package for Mathematica, The 10 th International Conference in MOdern GRoup ANalysis, 64 – 70, (2005).

[8] I. L. Freire and A. C. Faleiros, Lie point symmetries and some group invariant solutions of the quasilinear equation involving the infinity Laplacian, Nonlin. Anal. TMA, vol. 74, 3478–3486, (2011).

[9] I. L. Freire and A. C. Faleiros, On the Lie point symmetries of the Aronsson equation in the plane, Anais do CNMAC 2012, 305–311, (2012).

[10] I. L. Freire, Invariância, quantidades conservadas e soluções de equações diferenciais não-lineares, Tese de Livre-Docência, USP, (2014).

[11] P. E. Hydon, Symmetry methods for differential equations, Cambridge Texts in Applied Mathematics, (2000).

[12] N. H. Ibragimov, Transformation groups applied to Mathematical Physics, (1985).

[13] N. H. Ibragimov, Lie group analysis of differential equations, vol. 1, CRC, (1994).

[14] N. H. Ibragimov, Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations, Wiley, (1999).

[15] P. J. Olver, Applications of Lie groups to differential equations, Springer, New York, (1986).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0013