Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Limitantes para os Zeros Extremos de Determinados Polinômios Para-Ortogonais

A. Sri Ranga[1]

Departamento de Matemática Aplicada, UNESP, São José do Rio Preto, SP

D.O. Veronese[2]

Pós-Graduação em Matemática, UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. Foi mostrado recentemente que dada uma sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário, sempre é possível encontrar uma sequência de polinômios para-ortogonais que satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Além disso, foi mostrado também que a partir da relação de três termos é possível recuperar os polinômios ortogonais, os momentos associados e os coeficientes de Verblunsky. O principal objetivo deste trabalho é fornecer limitantes para os zeros destes polinômios para-ortogonais em termos dos coeficientes da fórmula de recorrência.

Palavras-chave. Limitantes, Zeros, Polinômios para-ortogonais, Coeficientes de Verblunsky

1 Introdução

Dada uma medida de probabilidade não trivial μ sobre o círculo unitário $\mathcal{C} = \{e^{i\theta}\colon\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, os polinômios ortogonais mônicos $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ são definidos por

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\overline{S_m(z)}d\mu(z) = \int_0^{2\pi} S_n(e^{i\theta})\overline{S_m(e^{i\theta})}d\mu(e^{i\theta}) = \delta_{nm}\kappa_n^{-2}.$$

Estes polinômios foram estudados inicialmente por Szegő e, por esse motivo, são conhecidos como polinômios de Szegő. De um modo geral, tais polinômios não satisfazem uma relação de recorrência de três termos, como no caso dos polinômios ortogonais na reta real. No entanto, eles satisfazem a seguinte relação de recorrência

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}\, S_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

onde $\alpha_{n-1} = -\overline{S_n(0)}$ e $S_n^*(z) = z^n\overline{S_n(1/\bar{z})}$. Os números α_n, $n \geq 0$, são denominados coeficientes de Verblunsky.

É bem conhecido que $|\alpha_n| < 1$, $n \geq 0$ e que os polinônios ortogonais no círculo unitário são completamente determinados por estes coeficientes (veja [6, 8]). Além disso, por meio

[1]ranga@ibilce.unesp.br
[2]veronese@icte.uftm.edu.br

de informações sobre os coeficientes de Verblunsky, é possível obter propriedades da medida associada μ.

Polinômios para-ortogonais mônicos de grau n associados a S_n são polinômios da forma $zS_{n-1}(z) + \rho_{n-1}S^*_{n-1}(z)$, com $|\rho_{n-1}| = 1$. Foi provado recentemente (veja [4]) que sempre existe uma sequência de polinômios para-ortogonais que satisfazem a seguinte relação de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]\, R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \tag{2}$$

com $R_0(z) = 1$ e $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$, onde $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência real e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é sequência encadeada positiva.

Em [2] e [4] mostrou-se que sempre é possível recuperar os correspondentes polinômios ortogonais, os momentos e os coeficientes de Verblunsky a partir da fórmula de recorrência (2). Além disso, mostrou-se também que o suporte da medida μ tem intrínseca relação com os zeros dos polinômios para-ortogonais R_n.

Os zeros de R_n dado pela fórmula de recorrência (2) são simples e estão sobre o círculo unitário. Além disso, se denotamos os zeros de R_n por $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$, $n = 1, 2, \ldots, n$, então temos a seguinte propriedade de entrelaçamento (veja [5])

$$0 < \theta_{n+1,1} < \theta_{n,1} < \theta_{n+1,2} < \cdots < \theta_{n,n} < \theta_{n+1,n+1} < 2\pi, \quad n \geq 1. \tag{3}$$

O conhecimento sobre a localização dos zeros dos polinômios R_n, tanto para obtenção de estimativas para o suporte da medida associada, quanto para aplicação em fórmulas de quadratura no círculo unitário, é de grande importância.

Sendo assim, o principal objetivo deste trabalho é encontrar estimativas para os limitantes dos zeros extremos $z_{n,1}$ e $z_{n,n}$ da sequência de polinômios $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ dados pela fórmula de recorrência (2).

2 Funções Associadas no Intervalo $[-1, 1]$

É conveniente estudar os zeros de $\{R_n\}$ utilizando certas funções reais associadas $\{\mathcal{W}_n\}$ as quais são definidas por

$$\mathcal{W}_n(x) = 2^{-n}e^{-in\theta/2}R_n(e^{i\theta}), \quad n \geq 0, \tag{4}$$

onde $x = \cos(\theta/2)$. A sequência de funções $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz (veja [1,5])

$$\mathcal{W}_{n+1}(x) = \left(x - c_{n+1}\sqrt{1 - x^2}\right)\mathcal{W}_n(x) - d_{n+1}\,\mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{5}$$

com $\mathcal{W}_0(x) = 1$ e $\mathcal{W}_1(x) = x - c_1\sqrt{1 - x^2}$.

Para todo $n \geq 1$, $\mathcal{W}_n$ tem exatamente n zeros distintos $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$, $j = 1, 2 \ldots, n$, em $(-1, 1)$.

Vale ressaltar que a propriedade de entrelaçamento (3) para os zeros de R_n e R_{n+1} foi obtida em [5] provando a propriedade de entrelaçamento

$$-1 < x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < \cdots < x_{n,1} < x_{n+1,1} < 1, \quad n \geq 1, \tag{6}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0008

para os zeros de $\mathcal{W}_n$ e $\mathcal{W}_{n+1}$ por meio da relação de recorrência (5).

Outro fato é que a sequência de funções $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^{\infty}$ dada por (4), satisfaz às seguintes relações de ortogonalidade

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{W}_{2n}(x)\, \mathcal{W}_{2m}(x)\, \sqrt{1-x^2}\, d\psi(x) = \rho_{2n}\, \delta_{n,m},$$

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{W}_{2n+1}(x)\, \mathcal{W}_{2m+1}(x)\, \sqrt{1-x^2}\, d\psi(x) = \rho_{2n+1}\, \delta_{n,m},$$

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{W}_{2n}(x)\, \mathcal{W}_{2m+1}(x)\, d\psi(x) = 0,$$

para $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, onde $d\psi(x) = -\sqrt{1-x^2}\, d\mu(e^{i2\arccos(x)})$,

$$\rho_0 = \frac{1}{2}[1 - \mathcal{R}e(\alpha_0)] \quad \text{e} \quad \rho_n = d_{n+1}\frac{1+c_n^2}{1+c_{n+1}^2}\rho_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

3 Limitantes para os Zeros Extremos de $R_n(z)$

Nesta seção, mostramos como é possível encontrar limitantes para os zeros extremos dos polinômios para-ortogonais $R_n(z)$, utilizando os coeficientes da fórmula de recorrência (2).

Teorema 3.1. *Seja $\mathcal{W}_n$ dada pela fórmula de recorrência* (5)*, onde $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência real e $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência encadeada positiva. Então, para $N \geq 2$, os zeros de $\mathcal{W}_n$, $1 \leq n \leq N$, pertencem ao intervalo $(A, B) \subseteq (-1, 1)$ se, e somente se,*

(a) $\quad \frac{A}{\sqrt{1-A^2}} < c_n < \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad$ *e*

(b) $\quad \left\{d_{n+1}(x)\right\}_{n=1}^{N-1} = \left\{\frac{d_{n+1}}{(x-c_n\sqrt{1-x^2})(x-c_{n+1}\sqrt{1-x^2})}\right\}_{n=1}^{N-1}$

é uma sequência encadeada positiva finita em $x = A$ e $x = B$.

Demonstração. De (5) temos que $\mathcal{W}_{n-1} \in C^2(-1, 1)$, $(-1)^{n-1}\, \mathcal{W}_{n-1}(-1) = \mathcal{W}_{n-1}(1)$,

$$\frac{\mathcal{W}_{n+1}(x)}{\mathcal{W}_n(x)} + d_{n+1}\frac{\mathcal{W}_{n-1}(x)}{\mathcal{W}_n(x)} = x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2}, \tag{7}$$

e

$$\frac{\mathcal{W}_n(x)}{(x-c_n\sqrt{1-x^2})\mathcal{W}_{n-1}(x)}\left(1 - \frac{\mathcal{W}_{n+1}(x)}{(x-c_{n+1}\sqrt{1-x^2})\mathcal{W}_n(x)}\right) = d_{n+1}(x), \tag{8}$$

para $n \geq 1$. Sendo assim, como $\mathcal{W}_1(1)/\mathcal{W}_0(1) = 1$ e tendo em vista que $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ é sequência encadeada positiva segue que $(-1)^{n-1}\, \mathcal{W}_{n-1}(-1) = \mathcal{W}_{n-1}(1) > 0$, $n \geq 1$.

Iremos provar o teorema com relação ao ponto A. Suponha que os zeros de $\mathcal{W}_N$ estão do lado direito de A. Então, pela propriedade de entrelaçamento (6) segue que $\mathcal{W}_n(A)/\mathcal{W}_{n-1}(A) < 0$, $1 \leq n \leq N$ e portanto, de (7) obtemos $A - c_n\sqrt{1-A^2} < 0$, $1 \leq n \leq N$. Assim, a parte (a) do teorema ocorre com relação ao ponto A.

Agora, como $\mathcal{W}_n(A)/[(A - c_n\sqrt{1-A^2})\mathcal{W}_{n-1}(A)] > 0$ para $1 \leq n \leq N$ e

$$d_{n+1}(A) = \frac{d_{n+1}}{(A - c_n\sqrt{1-A^2})(A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2})} > 0, \quad 1 \leq n \leq N-1,$$

de (8) temos que

$$\mathcal{W}_{n+1}(A)/[(A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2})\mathcal{W}_n(A)] \ < 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

Tendo em vista os resultados de Ismail e Li [7], $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{N}$ é sequência encadeada positiva finita se, e somente se, existe uma única sequência $\{m_n\}_{n=0}^{N}$ tal que

$$m_0 = 0, \quad 0 < m_n < 1, \ 1 \leq n \leq N \quad \text{e} \quad (1 - m_{n-1})\, m_n = d_{n+1}, \ 1 \leq n \leq N.$$

A sequência $\{m_n\}_{n=0}^{N}$ é a sequência de parâmetros minimal de $\{d_{n+1}\}_{n=1}^{N}$.

Portanto, de (8) é fácil ver que $\{d_{n+1}(A)\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada positiva. Assim, a parte (b) do teorema também ocorre com relação ao ponto A. Note que $\{1 - \mathcal{W}_{n+1}(A)/[(A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2})\mathcal{W}_n(A)]\}_{n=0}^{N-1}$ é sequência minimal de parâmetros para $\{d_{n+1}(A)\}_{n=1}^{N-1}$.

Reciprocamente, vamos assumir que a parte (a) e a parte (b) do teorema ocorrem com relação ao ponto A.

Claramente, da hipótese (a) do teorema, $\mathcal{W}_1(A) = A - c_1\sqrt{1-A^2} < 0$ (o que significa que $A < x_{1,1}$) e, além disso, $A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2} < 0$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Por outro lado, da hipótese (b) temos que

$$\left\{1 - \frac{\mathcal{W}_{n+1}(A)}{(A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2})\mathcal{W}_n(A)}\right\}_{n=0}^{N-1}$$

é sequência de parâmetros minimal para a sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}(A)\}_{n=1}^{N-1}$. Portanto,

$$0 < \frac{\mathcal{W}_{n+1}(A)}{(A - c_{n+1}\sqrt{1-A^2})\mathcal{W}_n(A)} < 1, \quad n = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Daí, obtemos que $(-1)^n\, \mathcal{W}_n(A) > 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Pela propriedade de entrelaçamento (6) para os zeros $x_{n,j}$, $j = 1, 2 \ldots, n$, de $\mathcal{W}_n$ observamos que $(-1)^j \mathcal{W}_n(x_{n-1,j}) > 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n-1$ e $n \geq 2$. Portanto, em particular,

$$(-1)^n\, \mathcal{W}_n(x_{n-1,n-1}) < 0, \quad n \geq 2.$$

Sendo assim, $A < x_{N,N}$ segue facilmente via indução.

Isso completa a prova do teorema com relação ao ponto A. A prova com relação ao ponto B é análoga. □

A seguir, usamos o resultado acima para encontrar boas estimativas para os limitantes dos zeros extremos de $\mathcal{W}_N$, ou equivalentemente, para encontrar boas estimativas para os limitantes dos zeros extremos de R_N.

Teorema 3.2. *Seja $N \geq 2$ e seja $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ uma sequência encadeada positiva tal que*

$$\frac{d_{n+1}}{\hat{d}_{n+1}} = q_{n+1} \leq 1 \quad \textit{para} \quad n = 1, 2, \ldots N-1.$$

Considere $\breve{u}_N = \min\{u_n : 2 \leq n \leq N\}$ *e* $\hat{v}_N = \max\{v_n : 2 \leq n \leq N\}$, *onde u_n e v_n pertencem à reta real estendida $[-\infty, \infty]$, e são tais que*

$$u_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}{(c_n + c_{n+1}) + \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}},$$

r

$$v_{n+1} = \frac{2(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}{(c_n + c_{n+1}) - \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}},$$

para $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Então os zeros de $\mathcal{W}_N$ pertencem a (A_N, B_N) e os zeros de R_N pertencem ao arco aberto $\mathcal{A}(2\arccos(B_N), 2\arccos(A_N))$, onde

$$A_N = \breve{u}_N / \sqrt{1 + \breve{u}_N^2} \quad e \quad B_N = \hat{v}_N / \sqrt{1 + \hat{v}_N^2}.$$

Demonstração. Primeiro analisamos os valores que x pode tomar, de modo que $\{d_{n+1}(x)\}_{n=1}^{N-1}$ dada no Teorema 3.1, seja sequência encadeada. Utilizando a sequência encadeada positva $\{\hat{d}_{n+1}\}_{n=1}^{N-1}$ temos então (veja [3, p. 97]) que se $0 < d_{n+1}(x) \leq \hat{d}_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$, então $\{d_{n+1}(x)\}_{n=1}^{N-1}$ é também sequência encadeada positiva. Observe que

$$d_{n+1}(x) = \frac{d_{n+1}}{(x - c_n\sqrt{1-x^2})(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2})}, \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

Portanto, se $x \in [-1, 1]$ é tal que

$$h_{n+1}(x) = (x - c_n\sqrt{1-x^2})(x - c_{n+1}\sqrt{1-x^2}) \geq q_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \tag{9}$$

então $\{d_{n+1}(x)\}_{n=1}^{N-1}$ é sequência encadeada positiva.

Primeiro assumimos que $q_{n+1} < 1$. Observe que os valores de x que satisfazem a inequação acima são tais que $-1 \leq x \leq a_{n+1}$ e $b_{n+1} \leq x \leq 1$.

Para determinar os valores de a_{n+1} e b_{n+1} substituimos x por $\cos(\theta/2)$ em (9) e obtemos

$$(1 - c_n c_{n+1})\cos^2(\theta/2) - (c_n + c_{n+1})\cos(\theta/2)\sin(\theta/2) + (c_n c_{n+1} - q_{n+1}) \geq 0.$$

Como $\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1$ e $\sin(\theta/2) > 0$ para $0 < \theta < 2\pi$, obtemos o seguinte conjunto de desigualdades as quais, para $x \in (-1, 1)$, são equivalentes a (9)

$$(1 - q_{n+1})\cot^2(\theta/2) - (c_n + c_{n+1})\cot(\theta/2) + (c_n c_{n+1} - q_{n+1}) \geq 0, \tag{10}$$

$1 \leq n \leq N-1$. Agora, resolvendo a equação do segundo grau

$$(1 - q_{n+1})\cot^2(\theta/2) - (c_n + c_{n+1})\cot(\theta/2) + (c_n c_{n+1} - q_{n+1}) = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{(c_n + c_{n+1}) - \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}}{2(1 - q_{n+1})}, \\ v_{n+1} &= \frac{(c_n + c_{n+1}) + \sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}}{2(1 - q_{n+1})}. \end{aligned} \tag{11}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0008

Note que o termo dentro da raiz em (11) é positvo pois

$$(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1}) \\ = (c_n - c_{n+1})^2 + 4q_{n+1} + 4q_{n+1}(c_n c_{n+1} - q_{n+1}).$$

Além disso,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\sqrt{(c_n + c_{n+1})^2 - 4(1 - q_{n+1})(c_n c_{n+1} - q_{n+1})}}{(1 - q_{n+1})} > 0. \tag{12}$$

Os valores de u_{n+1} e v_{n+1} são tais que a correspondente desigualdade em (10) ocorre se $-\infty < \cot(\theta/2) \leq u_{n+1}$ ou $v_{n+1} \leq \cot(\theta/2) < \infty$.

Claramente, do comportamento monotônico de $x = \cos(\theta/2)$ e $\cot(\theta/2)$ (isto é, ambos são monotonicamente decrescentes quando θ cresce de 0 a 2π), podemos observar que $a_{n+1} = u_{n+1}/\sqrt{1 + u_{n+1}^2}$ e $b_{n+1} = v_{n+1}/\sqrt{1 + v_{n+1}^2}$.

As expressões dadas no teorema para u_{n+1} e v_{n+1} são facilmente obtidas de (11) por multiplicações adequadas dos numeradores e denominadores.

Portanto, se $-\infty \leq \cot(\theta/2) \leq \check{u}_N$ ou $\hat{v}_N \leq \cot(\theta/2) \leq \infty$, então todas as desigualdades em (10) são satisfeitas e os valores de A_N e B_N dados no teorema são tais que $\{d_{n+1}(A_N)\}_{n=1}^{N-1}$ e $\{d_{n+1}(B_N)\}_{n=1}^{N-1}$ são sequências encadeadas positivas. Assim, os valores de A_N e B_N são tais que a parte (b) do Teorema 3.1 ocorre.

É fácil ver que

$$(v_{n+1} - c_n)(c_n - u_{n+1}) = \frac{q_{n+1}}{1 - q_{n+1}}(1 + c_n^2)$$

e

$$(v_{n+1} - c_{n+1})(c_{n+1} - u_{n+1}) = \frac{q_{n+1}}{1 - q_{n+1}}(1 + c_{n+1}^2),$$

para $n = 1, 2, \ldots, N-1$. Portanto, de (12), temos que $u_{n+1} < c_n$, $u_{n+1} < c_{n+1}$, $v_{n+1} > c_n$ e $v_{n+1} > c_{n+1}$ para $1 \leq n \leq N-1$. Além disso, temos também que

$$\check{u}_N < c_n \quad \text{e} \quad \hat{v}_N > c_n, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Assim, os valores obtidos para A_N e B_N também satisfazem a parte (a) do Teorema 3.1.

Finalmente, observamos que as expressões para u_{n+1} e v_{n+1} no teorema, as quais foram provadas para $q_{n+1} < 1$, continuam válidas se $q_{n+1} = 1$. Neste caso, ou $u_{n+1} = -\infty$ ou $v_{n+1} = \infty$.

Isso completa a prova do teorema. □

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, FAPESP e ao CNPq, pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Referências

[1] C. F. Bracciali, J. H. McCabe, T. E. Peréz and A. Sri Ranga, A class of orthogonal functions given by a three term recurrence formula, Math. Comp., (2015), (to appear).

[2] K. Castillo, M. S. Costa, A. Sri Ranga and D. O. Veronese, A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula, J. Approx. Theory, vol. 184 , 146-162, (2014).

[3] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, (1978).

[4] M. S. Costa, H. M. Felix and A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences, J. Approx. Theory, vol. 173 , 14-32, (2013).

[5] D. K. Dimitrov and A. Sri Ranga, Zeros of a family of hypergeometric para-orthogonal polynomials on the unit circle, Math. Nachr., vol. 286, 1778-1791, (2013).

[6] T. Erdélyi, P. Nevai, J. Zhang and J. Geronimo, A simple proof of Favard's theorem on the unit circle, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, vol. 39, 551–556, (1991).

[7] M. E. H. Ismail and Xin Li, Bounds for the extreme zeros of orthogonal polynomials, Proc. Amer. Math. Soc, vol. 115, 131-140, (1992), DOI: http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-1992-1079891-5.

[8] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 54, part 1, (2005).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0008