Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estimativas para n-Larguras de Kolmogorov de Conjuntos de Funções Finita e Infinitamente Diferenciáveis sobre o Toro

Régis Leandro Braguim Stábile[1]
IFSP - Campus Birigui, Birigui, SP
Sergio Antonio Tozoni[2]
Departamento de Matemática, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP

Resumo. A teoria de n-larguras foi introduzida por Kolmogorov na década de 1930. Desde então, muitos trabalhos têm visado obter estimativas assintóticas para n-larguras de diferentes classes de conjuntos. Neste trabalho, investigamos n-larguras de Kolmogorov de operadores multiplicadores associados a conjuntos de funções finitamente e infinitamente diferenciáveis sobre o toro. Em particular, demonstramos que as estimativas obtidas são assontícamente exatas em termos de ordem em diversas situações.

Palavras-chave. n-larguras, Kolmogorov, toro, operadores multiplicadores.

1 Introdução

Seja A um subconjunto compacto e centralmente simétrico de um espaço de Banach X. Definimos a n-largura de Kolmogorov de A em X por

$$d_n(A, X) = \inf_{X_n} \sup_{x \in A} \inf_{y \in X_n} \|x - y\|_X,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os espaços n-dimensionais X_n de X, tal valor nos diz o quão bem podemos aproximar o conjunto A por subespaços finito dimensionais de X. Se Y é um outro espaço de Banach e $T : X \longrightarrow Y$ um operador limitado, definimos a n-largura de Kolmogorov de T por $d_n(T) = d_n(T(B_X), Y)$, onde B_X denota a bola unitária fechada do espaço X.

Seja $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $\lambda_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$, e sejam $1 \leq p, q \leq \infty$. Se para todo $\varphi \in L^p(\mathbb{T}^d)$ existe uma função $f = \Lambda\varphi \in L^q(\mathbb{T}^d)$ com expansão formal em série de Fourier dada por

$$f \sim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \lambda_{\mathbf{k}} \, \widehat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},$$

tal que $\|\Lambda\|_{p,q} = \sup\{\|\Lambda\varphi\|_q : \varphi \in U_p\} < \infty$, dizemos que Λ é um operador multiplicador limitado de L^p em L^q, com norma $\|\Lambda\|_{p,q}$, onde U_p denota a bola unitária fechada do espaço $L^p(\mathbb{T}^d)$. Consideraremos operadores multiplicadores $\Lambda = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, onde $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda(|\mathbf{k}|)$ para uma função real λ definida sobre $[0, \infty)$ e $|\cdot|$ denota a norma euclidiana.

[1]registabile@ifsp.edu.br
[2]tozoni@ime.unicamp.br

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0005

2 Resultados

Se $\Lambda^{(1)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, onde a função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = t^{-\gamma}(\ln t)^{-\xi},\ t > 1$ e $\lambda(t) = 0$ para $0 \leq t \leq 1,\ \gamma, \xi \in \mathbb{R},\ \gamma > d/2,\ \xi \geq 0$, temos que $\Lambda^{(1)}U_p$ são conjuntos de funções finitamente diferenciáveis sobre $\mathbb{T}^d$, em particular, se $\xi = 0$ então $\Lambda^{(1)}U_p$ são classes de Sobolev.

Se $\Lambda^{(2)} = \{\lambda_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}$, onde a função $\lambda : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é definida por $\lambda(t) = e^{-\gamma t^r},\ \gamma, r > 0$, temos que $\Lambda^{(2)}U_p$ são conjuntos de funções infinitamente diferenciáveis (analíticas para $r = 1$).

Para os resultados seguintes, usaremos as notações

$$\vartheta_n = \begin{cases} 1, & 1 \leq p \leq 2,\ 1 < q \leq 2, \\ 1, & 2 \leq p < \infty, 2 \leq q \leq \infty, \\ 1, & 1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty, \\ (\ln n)^{-1/2}, & 1 \leq p \leq 2,\ q = 1, \\ (\ln n)^{-1/2}, & p = \infty,\ 2 \leq q \leq \infty. \end{cases} \quad , \quad (a)_+ = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0, \end{cases}$$

$a_n \gg b_n$ e $a_n \ll b_n$, se existirem constantes positivas C_1 e C_2 tais que $a_n \geq C_1 b_n$ e $a_n \leq C_2 b_n$, respectivamente, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tivermos $a_n \gg b_n$ e $a_n \ll b_n$, escreveremos $a_n \asymp b_n$.

Teorema 2.1. *Seja $\Lambda^{(1)}$ o operador multiplicador definido acima. Então para $1 \leq p \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos*

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p; L^q) \ll n^{-\gamma/d + (1/p - 1/2)_+}(\ln n)^{-\xi} \begin{cases} q^{1/2}, & q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases}$$

e para $1 \leq p, q \leq \infty$, temos

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ \gg\ n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi}\vartheta_n.$$

Teorema 2.2. *Seja $\Lambda^{(2)}$ o operador multiplicador definido acima e $\mathcal{R} = \gamma\left(d\Gamma(d/2)/2\pi^{d/2}\right)^{r/d}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ e $0 < r \leq 1$*

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ \gg\ e^{-\mathcal{R}n^{r/d}}\,\vartheta_n, \quad 1 \leq p, q \leq \infty,$$

$$d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ \ll\ e^{-\mathcal{R}n^{r/d}} n^{(1-r/d)(1/p-1/2)_+} \begin{cases} 1, & 2 \leq q < \infty, \\ (\ln n)^{1/2}, & q = \infty, \end{cases} \quad 1 \leq p \leq \infty,\ 2 \leq q \leq \infty.$$

Corolário 2.1. *Para $2 \leq p, q < \infty$ e $0 < r \leq 1$, temos que*

$$d_n(\Lambda^{(1)}U_p, L^q) \ \asymp\ n^{-\gamma/d}(\ln n)^{-\xi} \quad e \quad d_n(\Lambda^{(2)}U_p, L^q) \ \asymp\ e^{-\mathcal{R}n^{r/d}}.$$

Referências

[1] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Springer, 2 Ed., (2008).

[2] A. Kushpel, R. L. B. Stabile e S. A. Tozoni, Estimates for n-widths of sets of smooth function on the torus T^d, Journal of Approximation Theory, vol. 183, 45–71, (2014).

[3] A. Pinkus, n-Widths in Approximation Theory, Springer Verlag, (1985).

