Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Teoria de Lyapounov em Domínios Estratificados

Paola Geovanna Patzi Aquino[1]
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP
Dr. Geraldo Nunes Silva[2]
Departamento de Matemática Aplicada, IBILCE-UNESP, São José do Rio Preto, SP

Resumo. Neste trabalho será estudado sistemas fracamente decrescentes sobre um domínio estratificado. Será estabelecido condições Hamiltonianas que caracterizam quando um sistema é fracamente decrescente. Também será caracterizado funções de Lyapounov não suaves para sistemas estratificados e será apresentado o Teorema de Lyapounov em domínios estratificados que dá condições em que um ponto de equilíbrio é globalmente assintoticamente estável. Finalmente, será dado um exemplo para ilustrar a estabilidade assintótica global de um ponto de equilíbrio para sistemas estratificados.

Palavras-chave. Domínios estratificados, Sistemas fracamente decrescentes, Funções de Lyapounov.

1 Introdução

Neste trabalho caracterizaremos a teoria de Lyapounov para domínios estratificados. Bressan e Hong [2] foram os primeiros a definir e trabalhar em domínios estratificados. Grosso modo, estes são uma coleção de domínios disjuntos, cada um tendo sua própria dinâmica; mas não se exige que seus domínios sejam proximamente suaves e nem *wedged*. Estes termos foram introduzidos por P. Wolenski e R. Barnard em [1], onde caracterizaram a invariância fraca e forte em domínios estratificados. Com este mesmo enfoque Z. Rao e H. Zidane em [5] dão condições para estudar existência e unicidade de soluções no sentido de viscosidade para um sistema de Hamilton-Jacobi-Bellman sobre domínios estratificados. A partir destes trabalhos surgem ideias para seguir trabalhando em estes domínios estratificados. Nós estudamos condições hamiltonianas para sistemas fracamente decrescentes, e apresentamos condições que garantem a estabilidade assintótica global para uma dinâmica estratificada. O sistema dinâmico toma a forma de uma inclusão diferencial:

$$(x(t) \in G(x(t)), \quad \text{q.t.p. em } [0, T].$$

Começamos descrevendo os conceitos básicos de análise não suave, introduziremos a definição de domínio estratificado como é dado em [1], definiremos sistemas fracamente decrescentes, funções de Lyapounov para a dinâmica estratificada e ao final enunciamos o Teorema de Lyapounov para domínios estratificados.

[1]paola-anahi_@hotmail.com
[2]gsilva@ibilce.unesp.br

2 Preliminares

Revisamos alguns conceitos em análise não suave, requeridos em nosso trabalho. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Um vetor ξ é um normal proximal a $x \in C$ se existe $\sigma > 0$ tal que

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq \frac{\|\xi\|}{2\sigma} \|y - x\|^2 \quad \forall y \in C.$$

O conjunto de todos os normais proximais é um cone convexo e é denotado por $N_C^P(x)$.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ uma função semicontínua inferior e $y \in domf := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\}$. O subgradiente proximal é definido como

$$\partial^P f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : (\xi, -1) \in N_{epif}^P(x, f(x)\},$$

onde $epif := \{(x, r) : r \geq f(x)\}$ é o epígrafo de f.

Suponha $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ s.c.i. e $x \in domf$. Então $\xi \in \partial^P f(x)$ se e somente se existem $\sigma > 0$ e $\eta > 0$ tais que

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) + \sigma \|y - x\|^2,$$

para cada $y \in x + \eta\mathbb{B}$, onde $\mathbb{B}$ denota a bola aberta unitária de centro na origem.

Um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é chamado *proximamente suave* se existe $r > 0$ tal que função distância

$$d_C(x) := \inf_{c \in C} \|c - x\|$$

é diferenciável sobre a vizinhança aberta $C + r\mathbb{B}$ de C. Este termo foi introduzido em [3].

Existem várias equivalências para esta definição, mas só mencionaremos a mais interessante. Um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é *proximamente suave* se $N_C^P(x) \neq \{0\}$ para todo $x \in frC$. Aqui frC é a fronteira do conjunto C.

Como estamos trabalhando no espaço $\mathbb{R}^n$ (pelo Corolário 4.15 em [3]), temos: Se C é proximamente suave, então o cone normal proximal coincide com o cone normal de Clarke. E os cones tangentes de Bouligand e Clarke coincidem, não havendo necessidade de falar qual cone está em uso. Além disso, o cone tangente de Clarke é igual ao polar negativo de $N_C(x)$:

$$v \in \mathcal{T}_C(x) \Leftrightarrow \langle \xi, v \rangle \leq 0 \qquad \forall \xi \in N_C(x).$$

Se M é uma variedade imersa $\mathcal{C}^2$, $C := \overline{M}$, e $x \in M$, então $\mathcal{T}_C(x)$ coincide com o espaço tangente usual $\mathcal{T}_M(x)$ a M em x (ver [4], Proposição 1.9). Se $\overline{M}$ é proximamente suave, então para cada $x \in \overline{M}$ o cone tangente $\mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$ é fechado e convexo e seu interior relativo é denotado por $r{-}int\mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$ e a fronteira relativa como $r{-}fr\mathcal{T}_{\overline{M}}(x) := \mathcal{T}_{\overline{M}}(x) \backslash r{-}int\mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$.

O seguinte termo é introduzido em [4].

Um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é *relativamente wedged* se a dimensão do interior relativo do cone tangente é igual a dimensão de C, i.e., se dim$C$= k então dim $r - int\mathcal{T}_C(x) = k$ para todo $x \in C$.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0027

3 Sistemas Estratificados

Considere uma coleção finita de variedades diferenciáveis $\{M_1, M_2, ..., M_m\}$ (pelo menos de classe C^2) imersas no $\mathbb{R}^N$ tais que:

- $\mathbb{R}^N = \bigsqcup_{i=1}^m M_i$ e $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ quando $i \neq j$;
- Se $M_j \cap \overline{M_i} \neq \emptyset$ então $M_j \subset \overline{M_i}$;
- Cada $\overline{M_i}$ é proximamente suave de raio δ;
- Cada $\overline{M_i}$ é relativamente *wedged*.

Tal coleção é chamada de domínio estratificado e suas componentes M_i são chamadas subdomínios estratificados. A dimensão de M_i é denotada por d_i.

Seja $M \subseteq \mathbb{R}^N$ uma variedade diferenciável e $\mathcal{T}_M(x)$ denota o espaço tangente usual de M, em $x \in M$. Suponhamos que $\Gamma : M \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ é uma multifunção. A seguir temos uma coleção de hipóteses padrão (HP) comumente impostas na teoria de inclusão diferenciável.

$H1)$ $\forall x \in M$, $\Gamma(x)$ é um conjunto não vazio, convexo e compacto satisfazendo $\Gamma(x) \subseteq \mathcal{T}_M(x)$,

$H2)$ o gráfico $gr\Gamma := \{(x, v) : v \in \Gamma(x)\}$ é um conjunto fechado relativo a $M \times \mathbb{R}^N$ e

$H3)$ $\exists r > 0$ tal que $v \in \Gamma(x) \Rightarrow |v| \leq r(1 + |x|)$.

Associando a variedade M com a multifunção Γ, uma inclusão diferenciável com condições iniciais toma a forma,

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)), \text{ q.t.p. } t \in [0, T), \\ &x(0) = x, \end{aligned} \tag{1}$$

que, com $x \in M$ e diante das suposições (HP), tem ao menos uma solução $x(\cdot)$ definida sobre o intervalo $[0, T)$.

Uma outra hipótese frequentemente invocada na teoria de inclusão diferencial é a propriedade Lipschitz em subconjuntos limitados de M com respeito à métrica de Hausdorff-Pompieu. Isto significa: para cada $r > 0$, existe uma constante $k_r > 0$ tal que

H4) $x, y \in M \cap r\mathbb{B} \Rightarrow dist_{\mathcal{H}}(\Gamma(x), \Gamma(y)) \leq k_r \|x - y\|$

onde $r\mathbb{B}$ denota a bola centrada na origem de raio r, e $dist_{\mathcal{H}}$ é a distância de Hausdorff-Pompieu entre conjuntos compactos.

Notemos que a condição Lipschitz se mantém ao longo de qualquer subconjunto limitado de M e portanto tal multifunção Γ pode ser estendida ao fecho $\overline{M}$ e ainda mantém a propriedade de Lipschitz sobre $\overline{M}$. Denotemos esta extensão por $\widetilde{\Gamma}$.

Associamos a cada variedade M_i uma multifunção $F_i : M_i \to \mathbb{R}^n$. Suponha que (F_i, M_i) satisfaz (H1)-(H4). Dado que existe somente um número finito de objetos, podemos escolher as mesmas constantes de Lipschitz e de crescimento linear em (H1)-(H4) para todos os subdomínios.

Agora definamos a multifunção $F : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ como sendo

$$F(x) = F_i(x) \qquad \text{quando } x \in M_i,$$

chamada multifunção *velocidade básica*.

Esperamos que F satisfaça as hipóteses padrão; mas se observamos F, não necessariamente satisfaz (H2) em todo $\mathbb{R}^n$, talvez só em M_i.

Para evitar as dificuldades que estas deficiências teóricas implicaria, introduzimos a regularização de Filippov $G : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ dada por:

$$G(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co} \bigcup \{F(y) : \|y - x\| < \epsilon\}$$

a qual satisfaz (HP), mesmo que agora a condição de Lipschitz (H4) não é mais válida para $(\mathbb{R}^N, G)$.

Pela natureza da estrutura de estratificação pode-se obter a seguinte representação:

$$G(x) = co\{\widetilde{F}_i(x) : x \in \overline{M_i}\}.$$

A multifunção G é usada como a dinâmica. Para $x \in \mathbb{R}^N$, considere a inclusão diferencial:

$$(DI)_G \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) \in G(x(t)), \quad \text{q.t.p. } t \in [0, T], \end{cases}$$

E suponha que a dinâmica estratificada satisfaz a condição estrutural,

$$G(x) \cap \mathcal{T}_{M_i}(x) = F_i(x) \qquad \text{sempre que } x \in M_i.$$

Esta condição assegura que não existem trajetórias de G que não estejam em F.

Agora definamos uma nova multifunção. A multifunção *velocidade essencial* $G^\sharp : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é definida por:

$$G^\sharp(x) = \bigcup_i \{\widetilde{F}_i(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x) : x \in \overline{M}_i\}.$$

Temos $G^\sharp$ entre F e G; isto é, para cada x temos:

$$F_i(x) \subseteq G^\sharp(x) \subseteq G(x), \qquad \text{sempre que} \qquad x \in M_i.$$

$G^\sharp$ não possui propriedades desejáveis tipicamente invocadas em inclusões diferenciáveis. Por exemplo apesar de seus valores serem compactos, eles não necessariamente são convexos (violando $(H1)$; nem seu grafo é necessariamente fechado violando $(H2)$).

3.1 Sistemas Estratificados Fracamente Decrescentes

Denotemos por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ semicontínuas inferiormente.

Seja $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. O sistema (φ, Γ) é fracamente decrescente se para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^n$, existe uma trajetória x de Γ sobre $[0, T)$ com $x(0) = \alpha$, tal que

$$\varphi(x(t)) \leq \varphi(x(0)) = \varphi(\alpha) \quad \forall t \in [0, T).$$

Teorema 3.1. *Suponha que $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ e que um sistema estratificado são dados. Então (φ, G) é fracamente decrescente se e só se*

$$h_{G^\sharp}(x,\xi) = \min_{v \in G^\sharp(x)} \langle \xi, v \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \ \xi \in \partial^P \varphi(x). \tag{2}$$

Note que o resultado para sistemas convencionais de inclusões diferenciais, a desigualdade (2) é valida para dinâmicas que satisfazem hipóteses padrão. Aqui caracterizamos isto com $G^\sharp$ que não satisfaz as hipóteses padrão.

4 Teoria de Lyapounov em Domínios Estratificados

Nesta seção caracterizaremos sistemas fracamente decrescentes na forma do chamado domínio estratificado, definiremos funções de Lyapounov nestes domínios, e fornecemos condições que garantem a estabilidade assintótica global para uma dinâmica estratificada.

A teoria de estabilidade é essencial no estudo de sistemas de engenharia. Grosso modo, um ponto de equilíbrio diz se estável se todas soluções que iniciam próximas ao ponto de equilíbrio permanecem próximas do ponto de equilíbrio, caso contrário o ponto de equilíbrio é instável. Um ponto de equilíbrio diz-se assintoticamente estável se todas as soluções que iniciam próximas do ponto de equilíbrio não somente permanecem próximas ao ponto de equilíbrio, mas tendem ao ponto de equilíbrio a medida que o tempo se aproxima do infinito. De maneira mais formal temos a seguinte definição.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

onde f é uma função suave de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, e suponha que x^* é um ponto de equilíbrio de f, i.e., $f(x^*) = 0$. Se para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^N$ a solução $x(\cdot)$ da equação diferencial satisfazendo $x(0) = \alpha$ existe sobre $[0, \infty)$ e tem a propriedade de que $x(t) \to x^*$ quando $t \to \infty$, então o ponto de equilíbrio é dito "globalmente assintoticamente estável".

Um critério simples, mas de grande alcance para garantir essa estabilidade assintótica pode ser dada em termos de funções de Lyapounov. O método foi introduzido por A. M. Lyapounov (1892) na teoria de equações diferenciais.

Com isto em mente, é natural poder proceder no caso de uma inclusão diferencial $\dot{x} \in G(x)$.

Definição 4.1. *x^* é um ponto de equilíbrio da multifunção G se $0 \in G(x^*)$.*

Agora vamos definir quando duas funções são ditas um par de Lypounov em domínios estratificados (temos que pedir que (Q, G) seja fracamente decrescente.)

Definição 4.2. *Duas funções Q e $W \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ são ditas um par de Lyapounov para x^* associado à multifunção G, se elas satisfazem as seguintes propriedades:*

i) $Q(x) \geq 0, W(x) \geq 0$ e $W(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$;

ii) Os conjuntos de nível $\{x \in \mathbb{R}^N, Q(x) \leq q\}$ são compactos $\forall q \in \mathbb{R}$ e

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0027

iii) para cada x, para cada $\xi \in \partial^P Q(x)$, existe $v \in G^\sharp(x)$ tal que $\langle \xi, v\rangle \leq -W(x)$.

A condição *iii*) pode ser expressado em termos do Hamiltoniano minimizado:

iii) $h_{G^\sharp}(x, \partial^P Q(x)) \leq -W(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^N$.

4.1 Teorema de Lyapounov para Domínios Estratificados

Teorema 4.1. *Seja $0 \in G(x^*)$, e suponha que existem $Q, W \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ tais que (Q, W) seja um par Lyapounov para x^*. Então para qualquer $\alpha \in domQ$, existe uma trajetória x para G sobre $[0, \infty)$, tendo $x(0) = \alpha$ tal que $x(t) \to x^*$, quando $t \to \infty$ (i.e, x^* é globalmente assintoticamente estável).*

A prova da demonstração segue as linhas da prova da Proposição 5.5 de [4](pág. 213), só que no lugar de trabalhar com G usamos $G^\sharp$ e a nossa definição de par de Lyapounov para domínios estratificados.

Exemplo 4.1. *Consideremos $n = 1$ e sejam $M_1 = \{x : x < 0\}$, $M_2 = \{x : x > 0\}$, $M_3 = \{0\}$ subdomínios estratificados de $\mathbb{R}$, e sejam $F_1(x) = [-\frac{1}{2}, 1]$, para todo $x \in M_1$ e $F_2(x) = [-1, \frac{1}{2}]$, para todo $x \in M_2$.*

Notemos que G e $G^\sharp$ são diferentes sobre $M_3 = \{0\}$. Pois $G(0) = [-1, 1]$ e $G^\sharp(0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Note que $G^\sharp(0) \subset G(0)$.

Seja $x^* = 0$, então $0 \in G(x^*)$, x^* é um ponto de equilíbrio de G globalmente assintoticamente estável. De fato, sejam

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto Q(x) = |x| \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} W : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto W(x) = 1 - e^{-|x|} \end{aligned}$$

i) $Q, W \geq 0$ e $W(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$,

ii)os conjuntos de nível $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \leq q\}$ são compactos para todo $q \in \mathbb{R}$;

iii) também temos

$$\partial^P Q(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ [-1, 1], & x = 0 \ ; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

para todo x.

Se $x = 0$,

$$h_{G^\sharp}(x, \xi) = \min_{v \in G^\sharp(0)} \langle v, \xi\rangle = \min\{\langle [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [-1, 1]\rangle\} = -\frac{1}{2} \leq 0 = -W(x).$$

Se $x > 0$,

$$h_{G^\sharp}(x, \xi) = \min_{v \in G^\sharp(x)} \langle v, \xi\rangle = \min\{\langle [-1, \frac{1}{2}], 1\rangle\} = -1 \leq -W(x).$$

Se $x < 0$,

$$h_{G^\sharp}(x,\xi) = \min_{v \in G^\sharp(x)} \langle v, \xi \rangle = \min\{\langle [-\frac{1}{2}, 1], -1 \rangle\} = -1 \leq -W(x).$$

Assim $h_{G^\sharp}(x,\xi) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ *onde* $\xi \in \partial^P Q(x)$.

Logo temos que (Q, W) *são um par de Lyapounov. Pelo teorema de Lyapounov temos que* x^* *é globalmente assintoticamente estável.*

5 Conclusões

Apresentamos as condições que garantem a estabilidade assintótica global para uma dinâmica estratificada estendendo a teoria de Lyapunov de sistemas clássicos para sistemas estratificados. A principal diferença na obtenção deste resultado foi poder trabalhar com as velocidades essenciais de $G^\sharp$ no lugar das velocidades da multifunção G. E ilustramos o resultado com um exemplo.

Agradecimentos

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Referências

[1] R. Barnard and P. Wolenski, Flow invariance on stratified domains, Set-Valued and Variational Analysis, vol.21, 377-403, (2013), DOI: 10.1007/s11228-013-0230-y.

[2] A. Bressan and Y. Hong, Optimal control problems on stratified domains, Networks and Heterogeneous Media, vol.2, 313-331, (2007).

[3] F. H. Clarke, R. J. Stern and P. R. Wolenski, Proximal smoothness and the lower-C2, Property Journal of Convex Analysis, vol.2, 117-144, (1995).

[4] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P.R. Wolenski, Nonsmooth Analysis and Control Theory, New York, Springer, (1998).

[5] Z. Rao and H. Zidani, Hamilton-Jacobi-Bellman equations on multi-domains, Control and Optimization with PDE Constraints, vol.164, 93-116, (2013), DOI: 10.1007/978-3-0348-0631-2-6.

