Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Modelo de Timoshenko para vibração de vigas em nanoescala segundo a teoria do gradiente de deformação

Leticia Tonetto[1]
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada,UFRGS, Porto Alegre, RS,

Julio Cesar Ruiz Claeyssen[2]
Instituto de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo Nesse trabalho considera-se o comportamento dinâmico de vigas, que são utilizadas em nanotecnologia, tais como, modelagem em microscopia de força atômica, nanotubos de carbono e micro/nano dispositivos eletromecânicos. O modelo clássico de Timoshenko sofre alterações, baseadas na teoria do gradiente de deformação, a fim de capturar os efeitos da mudança de escala. Soluções espaciais e frequências naturais são obtidas utilizando o método modificado da decomposição de Adomian. Resultados comparativos mostram que os efeitos não-locais tem mais influência sobre as frequências naturais quando a espessura é comparável a medida característica de comprimento interno.

Palavras-chave: vibração de nanovigas, modelos não-locais, método da decomposição de Adomian.

1 Introdução

Teorias não-locais contínuas representam tentativas de estender a abordagem da mecânica do contínuo, a fim de capturar os efeitos da diminuição da escala. Observações experimentais e simulações atômicas tem indicado que as propriedades mecânicas são sensíveis ao tamanho das estruturas, quando essas se tornam muito pequenas. De modo que, sendo as teorias clássicas independentes de escala, não poderiam prever esse comportamento. Por outro lado, os modelos atômicos e moleculares são restritos às capacidades computacionais. Assim tem-se recebido atenção o desenvolvimento de teorias contínuas dependentes do tamanho para a modelagem de estruturas e dispositivos em escalas menores.

Três abordagens principais da mecânica do contínuo não-clássica tem sido desenvolvidas, modificadas e aplicadas para estudar o comportamento mecânico das micro e nanoestruturas [3]: teoria da elasticidade não-local de Eringen; teoria do gradiente da deformação; teoria da tensão acoplada.

Nesse trabalho, são consideradas as modificações baseadas na teoria do gradiente de deformação [3], [6], na qual três parâmetros materiais de comprimento interno extras

---

[1]leticia.tonetto@ufrgs.br
[2]julio@ufrgs.br

relativos a escala l_0, l_1, e l_2, aparecem em adição aos parâmetros clássicos, ou seja, módulo de elasticidade (E) e coeficiente de Poisson (ν), e são responsáveis por capturar os efeitos de escala. Essa teoria de elasticidade é uma extensão da teoria clássica de elasticidade, incluindo termos de gradiente de deformação de ordem superior baseados na hipótese que os materiais não podem ser modelados como uma coleção de pontos, mas devem ser considerados como átomos com mecanismos de deformação de ordem superior em micro e nanoescala [4].

O modelo de Timoshenko, deduzido a partir da teoria da elasticidade do gradiente da deformação e princípio de Hamilton, é apresentado em [3], [6], e descreve o deslocamento tranversal $w(t,x)$ e deslocamento angular $\phi(t,x)$, através das seguintes equações, dadas em (1), para $t \geq 0$ e $0 \leq x \leq L$, utilizando-se a notação dois pontos sobrescritos para indicar dupla derivação com relação à variável t e linhas $'$, $''$, $'''$ e $^{(iv)}$ para indicar derivação de ordem um, dois, três e quatro com relação a variável x,

$$\begin{aligned}
&\rho A\ddot{w}(t,x) + (k_3+k_4)w^{(iv)}(t,x) + (k_3-2k_4)\phi'''(t,x) - k_5(w''(t,x)-\phi'(t,x)) = f(t,x),\\
&\rho I\ddot{\phi}(t,x) + k_1\phi^{(iv)}(t,x) - (k_3-2k_4)w'''(t,x) - (k_2+k_3+4k_4)\phi''(t,x) - k_5(w'(t,x)-\phi(t,x)) = 0,
\end{aligned} \tag{1}$$

sendo

$$k_1 = (2\mu l_0^2 + \frac{4}{5}\mu l_1^2)I, \;\; k_2 = EI + 2\mu A l_0^2, k_3 = \frac{1}{4}\mu A l_2^2, \;\; k_4 = \frac{8}{15}\mu A l_1^2, \;\;\; k_5 = \kappa\mu A, \tag{2}$$

onde I, A, κ, μ e $f(t,x)$ representam momento de inércia, área da seção transversal, constante de cisalhamento, módulo de rigidez $\mu = G$, e força transversal distribuída, respectivamente.

As condições de contorno preescritas nas extremidades $x_0 = 0$ ou $x_0 = L$, desconsiderando forças e momentos externos são dadas por

$$\begin{aligned}
&(k_3+k_4)\tfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{(t,x_0)} + (k_3-2k_4)\tfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}|_{(t,x_0)} - k_5(\tfrac{\partial w}{\partial x} - \phi)|_{(t,x_0)} = 0 \;\text{ ou }\; w|_{(t,x_0)} = 0,\\
&(k_3+k_4)\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{(t,x_0)} + (k_3-2k_4)\tfrac{\partial \phi}{\partial x}|_{(t,x_0)} = 0 \;\text{ ou }\; \tfrac{\partial w}{\partial x}|_{(t,x_0)} = 0,\\
&-k_1\tfrac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}|_{(t,x_0)} + (k_3-2k_4)\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{(t,x_0)} + (k_2+k_3+4k_4)\tfrac{\partial \phi}{\partial x}|_{(t,x_0)} = 0 \;\text{ ou }\; \phi|_{(t,x_0)} = 0,\\
&k_1\tfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}|_{(t,x_0)} = 0 \;\;\text{ ou }\;\; \tfrac{\partial \phi}{\partial x}|_{(t,x_0)} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

2 Formulação modal matricial

As equações dadas em (1), no caso de vibrações livres, podem ser escritas na formulação matricial geral

$$\mathbf{M}\ddot{\mathsf{v}} + \mathbf{K}\mathsf{v} = 0, \quad \mathsf{v} = \begin{pmatrix} w(t,x) \\ \phi(t,x) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Supondo soluções exponencais em função das amplitudes espaciais

$$\mathsf{v}(t,x) = e^{\lambda t}\mathbf{w}(x), \;\; \mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0038

resulta o problema quadrático de autovalor

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{w}(x) = \mathbf{0}. \tag{6}$$

o qual pode ser escrito como uma equação diferencial matricial de quarta ordem

$$\mathbf{K}_0\mathbf{w}^{(iv)}(x) + \mathbf{K}_1\mathbf{w}'''(x) + \mathbf{K}_2\mathbf{w}''(x) + \mathbf{K}_3\mathbf{w}'(x) + \mathbf{K}_4\mathbf{w}(x) = \mathbf{0}, \tag{7}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_0 &= \begin{pmatrix} k_3 + k_4 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & k_3 - 2k_4 \\ -(k_3 - 2k_4) & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}_2 &= \begin{pmatrix} -k_5 & 0 \\ 0 & -(k_2 + k_3 + 4k_4) \end{pmatrix}, \ \mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & k_5 \\ -k_5 & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{K}_4 &= \begin{pmatrix} \lambda^2\rho A & 0 \\ 0 & \lambda^2\rho I + k_5 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8}$$

3 Formulação adimensional

Considerando parâmetros adimensionais definidos como

$$\begin{aligned}
&X = \tfrac{x}{L}, \ W(X) = \tfrac{w(x)}{L}, \ \Phi(X) = \phi(x), \\
&\Omega^2 = \tfrac{\rho A\omega^2 L^4}{EI}; \ \eta = \tfrac{I}{AL^2}; \ \xi_1 = \tfrac{\kappa GAL^2}{EI}; \\
&\xi_2 = \tfrac{k_3+k_4}{EI}, \ \xi_3 = \tfrac{k_3-2k_4}{EI}, \ \xi_4 = \tfrac{k_2+k_3+4k_4}{EI}, \ \ \xi_5 = \tfrac{k_1}{L^2EI},
\end{aligned} \tag{9}$$

as equações do problema espacial dadas em (7), tornam-se em uma formulação adimensional

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} -\xi_2 & 0 \\ 0 & -\xi_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W^{(iv)}(X) \\ \Phi^{(iv)}(X) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 \\ \xi_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W'''(X) \\ \Phi'''(X) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W''(X) \\ \Phi''(X) \end{bmatrix} + \\
&\begin{bmatrix} 0 & -\xi_1 \\ \xi_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W'(X) \\ \Phi'(X) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & \eta\Omega^2 - \xi_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W(X) \\ \Phi(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Suas respectivas condições de contorno dadas em (3), na forma adimensional preescritas em $X = 0$ e $X = 1$, são descritas por

$$\begin{aligned}
&\xi_2 W''' + \xi_3\Phi'' - \xi_1(W' - \Phi) = 0 \ \text{ ou } \ W = 0, \\
&\xi_2 W'' + \xi_3\Phi' = 0 \ \text{ ou } \ W' = 0, \\
&\xi_5\Phi''' + \xi_3 W'' + \xi_4\Phi' = 0 \ \text{ ou } \ \Phi = 0, \\
&\xi_5\Phi'' = 0 \ \text{ ou } \ \Phi' = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.

Observa-se que (10)-(11) se reduzem ao caso clássico quando $\xi_2 = \xi_3 = \xi_5 = 0$ e $\xi_4 = 1$.

4 Método da decomposição de Adomian modificado

O método da decomposição de Adomian (ADM) [1] é um método bastante conhecido para resolver equações operacionais lineares ou não lineares, através de séries infinitas, sem considerar técnicas que introduzem dificuldades computacionais ou hipóteses fisicamente restritivas, tais como, linearização, perturbação, discretização, etc. Hsu et.al [2] utilizaram o método da decomposição de Adomian modificado (AMDM) aplicado ao problema de vibrações livres de vigas uniformes de Timoshenko, de modo que as duas equações diferenciais governantes do modelo tornam-se duas equações algébricas recursivas inicializadas pelas condições de contorno na extremidade esquerda, e ao serem consideradas condições de contorno na extremidade direita é possível obter uma equação de frequência algébrica simples.

4.1 Descrição básica da aplicação do AMDM

O método da decomposição de Adomian considera que um operador diferencial geral dado seja decomposto em parte linear e não-linear, ou seja,

$$F\mathbf{w}(x) = \underbrace{L\mathbf{w}(x) + R\mathbf{w}(x)}_{\text{linear}} + \underbrace{\mathbf{N}\mathbf{w}(x)}_{\text{nonlinear}} = 0, \tag{12}$$

sendo L um operador linear inversível considerado como o termo cuja derivada é a de maior ordem. Resolvendo (12) para $L\mathbf{w}(x)$

$$\mathbf{w}(x) = \Psi(x) - L^{-1}[\mathbf{R}\mathbf{w}(x) + \mathbf{N}\mathbf{w}(x)], \tag{13}$$

com $\Psi(x)$ tal que $L\Psi(x) = 0$. O AMDM consiste em expandir $\mathbf{w}(x)$ em séries infinitas convergentes

$$\mathbf{w}(x) = \begin{bmatrix} w(x) \\ \phi(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{1,k}x^k \\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2,k}x^k \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k x^k. \tag{14}$$

E o termo não-linear expandido em termos dos polinômios denotados polinômios de Adomian [1] $\mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_k)$, determinados recursivamente a partir de fórmulas específicas,

$$\mathbf{N}\mathbf{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_k), \quad \mathbf{A}_k(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_k) = \begin{bmatrix} A_{1,k}(c_{1,0}, c_{1,1}, ..., c_{1,k}; c_{2,0}, c_{2,1}, ..., c_{2,k}) \\ A_{2,k}(c_{1,0}, c_{1,1}, ..., c_{1,k}; c_{2,0}, c_{2,1}, ..., c_{2,k}) \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Tal método foi utilizado em [2] para o modelo de Timoshenko clássico, onde $L = \frac{d^2}{dx^2}$ e desconsiderando-se termos não-lineares. Na seção a seguir a formulação é extendida para o caso do modelo não-local de Timoshenko onde $L = \frac{d^4}{dx^4}$.

4.2 AMDM aplicado ao modelo não-local gradiente de deformação de Timoshenko

Considerando o sistema de equações dado em (10) escrito na forma

$$\mathbf{w}^{(iv)}(X) + \mathbf{Q}\mathbf{w}'''(X) + \mathbf{R}\mathbf{w}''(X) + \mathbf{S}\mathbf{w}'(X) + \mathbf{T}\mathbf{w}(X) = 0. \tag{16}$$

Nesse caso $L = \frac{d^4}{dX^4}$, então $L^{-1}[\cdot] = \int_0^X \int_0^X \int_0^X \int_0^X [\cdot]\ dX\ dX\ dX\ dX$. Expandindo $\mathbf{w}(x)$ em séries convergentes

$$\mathbf{w}(X) = \begin{bmatrix} W(X) \\ \Phi(X) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{c}_k X^k, \tag{17}$$

substituindo em (16) e resolvendo em $L\mathbf{w}$ obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(X) &= \boldsymbol{\Psi}(X) - L^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(k+3)!}{k!}\mathbf{Q}\mathbf{c}_{k+3} + \tfrac{(k+2)!}{k!}\mathbf{R}\mathbf{c}_{k+2} + (k+1)\mathbf{S}\mathbf{c}_{k+1} + \mathbf{T}\mathbf{c}_k\right) X^k \\ &= \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 X + \mathbf{c}_2 \tfrac{X^2}{2!} + \mathbf{c}_3 \tfrac{X^3}{3!} - \Big[\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\tfrac{(k+3)!}{k!}\mathbf{Q}\mathbf{c}_{k+3} + \tfrac{(k+2)!}{k!}\mathbf{R}\mathbf{c}_{k+2} + \\ &+ (k+1)\mathbf{S}\mathbf{c}_{k+1} + \mathbf{T}\mathbf{c}_k\Big)\frac{X^{k+4}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\Big]. \end{aligned} \tag{18}$$

E então, coletando nas potências de x

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} W(0) \\ \Phi(0) \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_1 = \mathbf{w}'(0) = \begin{bmatrix} W'(0) \\ \Phi'(0) \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{w}''(0) = \begin{bmatrix} W''(0) \\ \Phi''(0) \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_3 = \mathbf{w}'''(0) = \begin{bmatrix} W'''(0) \\ \Phi'''(0) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

e para $k = 4, 5, ...$

$$\mathbf{c}_k = \frac{-[(k-1)(k-2)(k-3)\mathbf{Q}\mathbf{c}_{k-1} + (k-2)(k-3)\mathbf{R}\mathbf{c}_{k-2} + (k-3)\mathbf{S}\mathbf{c}_{k-3} + \mathbf{T}\mathbf{c}_{k-4}]}{k(k-1)(k-2)(k-3)}. \tag{20}$$

Na prática a série é truncada, de modo a ser obtida uma aproximação com n termos

$$\mathbf{w}(X) \doteq \varphi^{[n]}(X) = \begin{bmatrix} W^{[n]}(X) \\ \Phi^{[n]}(X) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}_k X^k. \tag{21}$$

Visto que $\mathbf{c}_0$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, e $\mathbf{c}_3$, serão apenas parcialmente determinadas pelas condições de contorno em $X = 0$, considera-se $\mathbf{c}_k = \mathbf{P}_k\mathbf{a}$, com $\mathbf{a} = [a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4]^T$, e as primeiras quatro $\mathbf{P}'_k s$ serão determinadas por essas condições de contorno.

No caso da viga bi-apoiada, das condições em $X = 0$, $W(0) = \Phi'(0) = W''(0) = \Phi'''(0) = 0$, tem-se

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \ \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \ \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \ \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

e de (20), para $k = 4, 5, 6...$

$$\mathbf{P}_k = \frac{-[(k-1)(k-2)(k-3)\mathbf{Q}\mathbf{P}_{k-1} + (k-2)(k-3)\mathbf{R}\mathbf{P}_{k-2} + (k-3)\mathbf{S}\mathbf{P}_{k-3} + \mathbf{T}\mathbf{P}_{k-4}]}{k(k-1)(k-2)(k-3)} \tag{23}$$

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0038

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.

Agora, das condições de contorno em $X = 1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}_3} \begin{bmatrix} W'''(1) \\ \Phi'''(1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}_2} \begin{bmatrix} W''(1) \\ \phi''(1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}_1} \begin{bmatrix} W'(1) \\ \phi'(1) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}_0} \begin{bmatrix} W(1) \\ \phi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

resulta o sistema $F^{[n]}(\Omega)\mathbf{a} = \mathbf{0}$, com

$$\begin{aligned} F^{[n]}(\Omega) &= \sum_{k=0}^{n-4}(k+3)(k+2)(k+1)\mathcal{C}_3\mathbf{P}_{k+3} + \sum_{k=0}^{n-3}(k+2)(k+1)\mathcal{C}_2\mathbf{P}_{k+2} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\mathcal{C}_1\mathbf{P}_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\mathcal{C}_0\mathbf{P}_k, \end{aligned} \tag{25}$$

e então as frequências adimensionais Ω_i são obtidas resolvendo a equação de frequência $\det(F^{[n]}(\Omega)) = 0$.

O i-ésimo modo de vibração associado a i-ésima frequência Ω_i é dado por

$$\varphi_i^{[n]}(X) = \begin{bmatrix} W_i^{[n]}(X) \\ \Phi_i^{[n]}(X) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{c}_k^{[i]} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{P}_k(\Omega_i)\mathbf{a}X^k. \tag{26}$$

5 Resultados numéricos

Na Tabela 1 são apresentadas as frequências naturais adimensionais para o modelo não-local gradiente de deformação de Timoshenko (TBSG) com diferentes configurações, considerando os parâmetros adimensionais estimados pelos parâmetros dimensionais fornecidos na literatura [5], considerando a simplificação $l = l_0 = l_1 = l_2 = 17.6\mu m$, variando $h = \alpha l$ ($\alpha = 1, 4, 8, 10$), comparativamente com o caso clássico cujas frequências adimensionais não dependem de h, quando L e b são considerados múltiplos de h, $L = 20h$ e $b = 2h$.

6 Conclusões

O modelo não-local de Timoshenko baseado na teoria do gradiente de deformação foi formulado matricialmente considerando parâmetros adimensionais. O AMDM foi aplicado como uma extensão do mesmo método aplicado ao caso clássico de Timoshenko [2]. Verificou-se, em concordância com o constatado na literatura [6], que os resultados obtidos pelo caso considerando os efeitos da teoria do gradiente de deformação apresentam maior diferença daqueles obtidos pelo caso clássico quando a espessura h é comparável ao parâmetro material de comprimento interno $h = l$. Quando h torna-se maior em relação l os resultados tendem aos resultados do caso clássico. Isso se justifica pela análise dos parâmetros adimensionais, pois quando h torna-se maior que l os parâmetros ξ_2, ξ_3 e ξ_5 tendem a zero e ξ_4 tende a 1, o que corresponde ao caso clássico.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0038

Caso	Frequências naturais adimensionais Ω_i				
	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
A) TBSG ($h = l$) (n=30)	44.15	156.76	309.67	504.50	525.42
A) TBSG ($h = l$) (n=50)	44.15	156.76	309.66	491.56	701.71
B) TBSG ($h = 4l$) (n=30)	14.95	58.73	128.47	213.62	710.77
B) TBSG ($h = 4l$) (n=50)	14.95	58.73	128.47	220.33	330.41
C) TBSG ($h = 8l$) (n=30)	11.34	44.82	98.94	166.14	712.44
C) TBSG ($h = 8l$) (n=50)	11.34	44.82	98.94	171.53	260.15
D) TBSG ($h = 10l$) (n=30)	10.82	42.80	94.58	159.02	711.57
D) TBSG ($h = 10l$) (n=50)	10.82	42.80	94.58	164.19	249.35
E) TB Clássico(n=30)	9.83	38.94	86.17	630.99	3098.38
E) TB Clássico(n=50)	9.83	38.94	86.18	149.91	228.17

A)$\xi_1 = 2000$, $\eta = 0.0002$, $\xi_2 = 4.7$, $\xi_3 = -4.9$, $\xi_4 = 27.3$, $\xi_5 = 0.0035$,
B)$\xi_1 = 2000$, $\eta = 0.0002$, $\xi_2 = 0.3$, $\xi_3 = -0.3$, $\xi_4 = 2.64$, $\xi_5 = 0.00021$,
C)$\xi_1 = 2000$, $\eta = 0.0002$, $\xi_2 = 0.07$, $\xi_3 = -0.076$, $\xi_4 = 1.41$, $\xi_5 = 0.00005$,
D)$\xi_1 = 2000$, $\eta = 0.0002$, $\xi_2 = 0.04$, $\xi_3 = -0.04$, $\xi_4 = 1.26$, $\xi_5 = 0.00003$,
E)$\xi_1 = 2000$, $\eta = 0.0002$

Tabela 1: Frequências naturais adimensionais para viga bi-apoiada, modelo gradiente de deformação, variando espessura h, e modelo clássico de Timoshenko.

Referências

[1] G. Adomian, A review of the decomposition Method in Applied Mathematics, Journal of mathematical analysis and applications, vol. 135, 501-544 (1988).

[2] J-C Hsu and H-Y Lai and C-K Chen, An innovative eigenvalue problem solver for free vibration of uniform Timoshenko beams by using the Adomian modified decomposition method, Journal of Sound and Vibration, vol. 325, 451–470, (2009).

[3] M.H. Kahrobaiyan and Asghari, M. and Ahmadian, M.T., A strain gradient Timoshenko beam element: application to MEMS, Acta Mechanica, 1-21, (2014).

[4] C.W. Lim and G. Zhang and J.N. Reddy, A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation, Journal of Mechanics and Physics of Solids, vol. 78, 298-313 (2015).

[5] H.M. Ma and X.-L Gao and J.N. Reddy, A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 56, 3379-3391, (2008).

[6] B. Wang and J. Zhao and S. Zhou, A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory, European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 29, 591-599 (2010).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0038