Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Obtenção das séries de Fourier através de aproximações de funções em espaços ortogonais

Ítalo Ferreira Nunes da Paz[1]
Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Mecânica, UFRN, Natal, RN
Fabiana T. Santana[2]
Escola de Ciências e Tecnologia, UFRN, Natal, RN

Resumo. Neste trabalho foi feito um estudo detalhado de aproximações por Mínimos Quadrados em espaços vetoriais ortogonais. Em particular, foi feito o desenvolvimento matemático para se obter a melhor aproximação da função f no espaço W, gerado pelas funções $1, cost, cos(2t), \ldots, cos(nt), \ldots, sent, sen(2t), \ldots, sen(nt), \ldots$, utilizando um produto interno apropriado. Tal função é denominada série de Fourier de f. Por fim, foi aplicado os conceitos estudados na obtenção da solução de um oscilador harmônico.

Palavras-chave. Mínimos Quadrados, Espaços Ortogonais, Séries Fourier.

1 Introdução

Muitas vezes, os sistemas lineares oriundos de um modelo matemático pode não apresentar solução devido às aproximações feitas durante a modelagem do problema. Nessas sistuações, a Álgebra Linear fornece a melhor solução para o problema por mínimos quadrados, [1, 2]. Neste trabalho, dada uma função f e um espaço ortogonal W gerado pelas funções $1, cost, cos(2t), \ldots, cos(nt), \ldots, sent$, $sen(2t), \ldots, sen(nt), \ldots$, através do processo de mínimos quadrados obtém-se a série de Fourier de f, que é a melhor função $g \in W$, tal que $\|f - g\|$ é mínima, [4]. Funções ortogonais, assim como as séries de Fourier, tem importância especial e aparecem em várias aplicações físicas modeladas por equações diferenciais funcionando como ferramentas especiais em suas resoluções, [3].

2 Obtenção da Série de Fourier e Aplicação

Sejam V o espaço vetorial das funções reais contínuas e $f \in V$. Pelo Teorema da Melhor Aproximação, se $W \subset V$ for um subespaço de dimensão finita com produto interno $\langle g_1, g_2 \rangle = \int_0^{2\pi} g_1(t) g_2(t) dt$, então a $proj_W f \in W$ satisfaz $||f - proj_W f|| < ||f - h||$ para

[1]italonpaz@gmail.com
[2]fabianatsantana@gmail.com

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0041

qualquer função $h \in W$ distinta de $proj_W f$. Este teorema, cuja demonstração pode ser vista em [1], garante que a projeção de f em W é a função que melhor se aproxima de f em W. Por outro lado, se $B = \{g_0, g_1, ..., g_{2n}\}$ é uma base ortonormal de W e $f \notin W$, então $proj_W f =< f, g_0 > g_0 + < f, g_1 > g_1 + ... + < f, g_{2n} > g_{2n}$, [1].

Utilizando o conjunto $B = \{1, cost, cos(2t), ..., cos(nt), sent, sen(2t), ..., sen(nt)\}$, primeiramente verificou-se que esta é uma base ortogonal do espaço W, o que pode ser feito aplicando o processo de Gram-Schmidt ou apenas calculando o produto interno entre as funções $\phi_0(t) = 1$, $\phi_n(t) = cos(nt)$, $\phi_m(t) = cos(mt)$, $\varphi_n(t) = sen(nt)$ e $\varphi_m(t) = sen(mt)$. Após isso, as funções foram normalizadas dando origem à seguinte base ortonormal $B' = \{g_0, g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}, \ldots g_{2n}\}$ onde $g_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, g_1 = \frac{cost}{\sqrt{\pi}}, \ldots, g_n = \frac{cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, g_{n+1} = \frac{sent}{\sqrt{\pi}}, \ldots, g_{2n} = \frac{sen(nt)}{\sqrt{\pi}}$.

Utilizando a base ortonormal B', foi possível escrever $proj_W f =< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cost > \frac{1}{\sqrt{\pi}} cost + < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(2t) > \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(2t) + \ldots + < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nt) > \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nt) + < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sent > \frac{1}{\sqrt{\pi}} sent + < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(2t) > \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(2t) + \ldots + < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(nt) > \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(nt)$.

Calculando os produtos internos e colocando os termos comuns em evidência, conclui-se que $proj_W f = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k sen(kt)$, onde $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) dt$, $a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) cos(kt) dt$, $b_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) sen(kt) dt$. Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ são os $2n$ primeiros coeficientes de Fourier de f, [1].

O estudo feito foi aplicado na resolução do oscilador $y'' + \omega^2 y = r(t)$, onde $r(t) = (t + \pi)$, se $-\pi < t < 0$, ou $r(t) = -t + \pi$, se $0 < t < \pi$. Para isso, primeiramente, verificou-se que a aproximação da função r em séries de Fourier é $r(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} cost + \frac{4}{9\pi} cos(3t) + \frac{4}{25\pi} cos(5t) + \ldots$ e, a partir daí, aplicou-se o princípio da superposição de soluções de sistemas de equações diferenciais de segunda ordem para obter a solução total $y(t) = c_1 cos(\omega t) + c_2 sen(\omega t) + \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{\omega^2 - 1} cost + \frac{1/9}{\omega^2 - 1} cos(3t) + \frac{1/25}{\omega^2 - 1} cos(5t) + \ldots \right)$ que é dada pela soma da solução particular com a solução homogênea.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela PROPESQ-UFRN.

Referências

[1] H. Anton e C. Rorres, Álgebra linear com aplicações, Bookman, (2001).

[2] S. C. Chapra e R. P. Canale, Métodos numéricos para engenharia, São Paulo: McGraw-Hill, (2008).

[3] E. Kreyszig, Matemática superior para engenharia, vol. 2, LTC, (2009).

[4] D. G. Zill e M. R. Cullen, Equações Diferenciais, vol. 2, Makron Books, (2007).

