Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Q-integralidade do Grafo Total de K_n

Maikon Machado Toledo [1]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS
Luiz Emilio Allem[2]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS
Juliane Golubinski Capaverde[3]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Grafos Q-integrais são grafos cujo espectro em relação à matriz laplaciana sem sinal é constituído somente por números inteiros. A caracterização geral dos grafos com esta propriedade é um problema bem difícil. Ao mesmo tempo que se busca grafos Q-integrais também é interessante encontrar operações que preservem a Q-integralidade dos grafos, ou seja, operações que quando aplicadas em grafos Q-integrais gerem novos grafos Q-integrais. Sabemos que os grafos completos são Q-integrais [1]. Nossa contribuição consiste em mostrar que a operação grafo total quando aplicada em um grafo completo preserva a Q-integralidade do mesmo, ou seja, gera um novo grafo Q-integral.

Palavras-chave.Grafos, grafo total, Q-integralidade .

1 Introdução

Um dos tópicos de pesquisa em Teoria Espectral de Grafos é o dos grafos integrais. Isto é, grafos cujo espectro em relação à matriz de adjacência é constituído somente por números inteiros. O interesse por grafos com esta propriedade teve início em 1974, quando Harary e Schwenk publicaram o artigo [3], no qual, os autores observaram que uma caracterização geral destes grafos parecia um problema bem complicado. Devido a isso, a procura por grafos integrais é feita dentro de classes especiais de grafos. Posteriormente, outros autores estudaram os grafos laplaciano integrais, ou seja, aqueles com espectro relativo à matriz laplaciana formado exclusivamente por inteiros. Nos últimos anos, um problema análogo para matriz laplaciana sem sinal (denotada por Q) vem sendo estudado. Nosso objetivo é buscar grafos Q-integrais, isto é, grafos cujo espectro em à relação a matriz Q é formado apenas por inteiros. Nossa contribuição consiste em mostrar que a operação grafo total quando aplicada em um grafo completo preserva a Q-integralidade do mesmo.

[1]maikon.toledo@ufrgs.br
[2]emilio.allem@ufrgs.br
[3]juliane.capaverde@ufrgs.br

2 Grafo total

Neste trabalho consideraremos apenas grafos simples $G = (V, E)$ com n vértices. O grafo denotado por K_n, é o grafo com n vértices, onde cada vértice é ligado a todos os outros. A matriz laplaciana sem sinal de um grafo G é denotada por $Q(G)$, tal que a entrada q_{ij} é dada por:

$$q_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & \text{se } i = j, \\ 1, & \text{se } \{i, j\} \in E, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A seguir definiremos a operação **grafo total** e para maiores detalhes veja [2].

Definição 2.1. *O **grafo total** de $G = (V, E)$ é dado por $T(G) = (V', E')$ em que $V' = V \cup E$. Dois vértices distintos $u, v \in V'$ são adjacentes em $T(G)$ se uma das três condições abaixo acontecer:*
i) *$u, v \in V$ e $\{u, v\} \in E$;*
ii) *$u, v \in E$ e u e v são incidentes a um mesmo vértice em G;*
iii) *$u \in V$ $v \in E$ e v é incidente a u em G;*

As figuras 1 e 2 abaixo ilustram a operação grafo total aplicada em K_3.

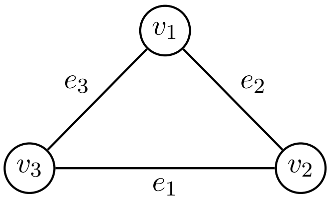

Figura 1: K_3

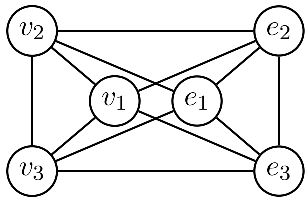

Figura 2: $T(K_3)$

O resultado abaixo é a nossa contribuição que garante a preservação da Q-integralidade de K_n quando a operação grafo total é efetuada no mesmo.

Teorema 2.1. *Para todo $n \geq 3$, temos que $T(K_n)$ é Q-integral. Além disso, os autovalores de $Q(T(K_n))$ são $2n-4$, $3n-5$ e $4n-4$ com multiplicidades $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$, n e 1, respectivamente.*

Referências

[1] N. Abreu, R. Del-Vecchio , V. Trevisan e C. Vinagre, Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução, III^{o} Colóquio de Matemática da Região Sul, vol. 1, (2014).

[2] D. M. Cvetkovic, M. Doob and H. Sachs, Spectra of Graphs: Theory and Application, Academic Press, vol. 1, (1980).

[3] F. Harary, A. Schwenk, Which graphs have integral spectra?, Graphs and Combinatorics, vol. 406, 45-51, (1974).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0047