Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Teoremas de Entrelaçamento

Guilherme Porto[1]

Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

Luiz Emílio Allem[2]

Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Dado um grafo G, a Matriz de Adjacência $A(G)$, a Matriz Laplaciana $L(G)$, a Matriz Laplaciana Normalizada $\mathcal{L}(G)$ e a Matriz Laplaciana Sem Sinal $Q(G)$ são estudadas visando a descoberta de novas propriedades do grafo. Neste trabalho apresentamos resultados de entrelaçamento de autovalores para essas quatro matrizes relativos a operação de subdivisão de uma aresta de G, e exemplos de que estas são as melhores desigualdades possíveis. Além disso, apresentamos um resultado de entrelaçamento de autovalores para a Matriz Laplaciana Sem Sinal relativo a operação de contração de dois vértices do grafo G.

Palavras-chave. Grafo, Teoria Espectral de Grafos, Entrelaçamento, Autovalor.

1 Introdução

Um **grafo** G é um par ordenado $G = (V, E)$, constituído por um conjunto finito e não vazio V, cujos elementos são denominados **vértices**, e um conjunto E de subconjuntos de dois elementos de V, denominados **arestas**.

Grafos podem ser representados por matrizes que facilitam aplicações computacionais e matemáticas. Dentre as representações matriciais de grafos mais importantes estão a Matriz de Adjacência $A(G)$, a Matriz Laplaciana $L(G)$, a Matriz Laplaciana Normalizada $\mathcal{L}(G)$ e a Matriz Laplaciana Sem Sinal $Q(G)$. Tais matrizes tem linhas e colunas indexadas pelos vértices de G e tem entradas dadas por

$$A(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ se } \{u,v\} \in E, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \qquad L(u,v) = \begin{cases} d(u), \text{ se } u = v, \\ -1, \text{ se } \{u,v\} \in E, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(u,v) = \begin{cases} 1, \text{ se } u = v \text{ e } d(u) \neq 0, \\ \dfrac{-1}{\sqrt{d(u)d(v)}}, \text{ se } \{u,v\} \in E, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases} \qquad Q(u,v) = \begin{cases} d(u), \text{ se } u = v, \\ 1, \text{ se } \{u,v\} \in E, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Operações entre grafos constroem novos grafos a partir de grafos dados.

[1]guilherme.porto@ufrgs.br
[2]emilio.allem@ufrgs.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.

Com a operação de **subdivisão de uma aresta** $f = \{u, v\} \in E$ de um grafo $G = (V, E)$ obtemos um novo grafo $G \setminus f$ deletando a aresta f e adicionando um novo vértice x_f que é ligado aos vértices u e v.

Com a operação de **contração de vértices** $u, v \in V$ de um grafo $G = (V, E)$ obtemos um novo grafo $G \setminus \{u, v\}$ deletando os vértices u e v e adicionando um novo vértice x_{uv} ligado a todos os vértices que eram ligados a u e a todos os vértices que eram ligados a v.

Seja G um grafo e $H = G \setminus f$, onde $f = \{u, v\} \in E$. Observe que $G = H \setminus \{x_f, u\} = H \setminus \{x_f, v\}$, ou seja, toda subdivisão de aresta pode ser revertida pela contração de dois vértices adjacentes. Note que a relação contrária nem sempre é válida.

2 Resultados de Entrelaçamento

Seja G um grafo e H o grafo obtido por uma das operações citadas acima. Sejam λ_i, $i = 1, ..., n$ os autovalores associados com $A(G)$, $L(G)$, $\mathcal{L}(G)$, ou $Q(G)$ e sejam θ_i os autovalores associados com $A(H)$, $L(H)$, $\mathcal{L}(H)$, ou $Q(H)$, onde ambos conjuntos de autovalores estão em ordem não crescente. Listamos abaixo os resultados de entrelaçamento, sendo que nossa contribuição é a coluna $H = G \setminus f$ e a primeira linha da coluna $H = G \setminus \{u, v\}$.

Tabela 1: Teoremas de Entrelaçamento.

	$H = G \setminus f$		$H = G \setminus \{u, v\}$	
(Q)	$(Q1)$	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+1} - 1$	$(Q2)$	$\lambda_i \geq \theta_i - \frac{d-\alpha}{2} \geq \lambda_{i+1} - \alpha$
(L)	$(L1)$	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2}$	$(L2)$	**Problema em Aberto**
$(\mathcal{L})$	$(\mathcal{L}1)$	$\theta_{i-2} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+3}$	$(\mathcal{L}2)$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+1}$ [1]
(A)	$(A1)$	$\theta_{i-1} \geq \lambda_i \geq \theta_{i+2}$	$(A2)$	$\lambda_{i-1} \geq \theta_i \geq \lambda_{i+2}$ [1]

Obs.: $\alpha = \sqrt{4d + d^2}$, onde d é o mínimo entre o grau do vértice u e o grau do vértice v.

Observações:

(1) As demonstrações dos resultados $(Q1)$, $(Q2)$ e $(L1)$ são contribuições originais e utilizam ferramentas apresentadas em [1] e [2].

(2) O resultado $(\mathcal{L}2)$ exige que os vértices contraídos não sejam adjacentes. Nosso resultado $(\mathcal{L}1)$ é uma complementação para o caso que os vértices contraídos são adjacentes, visto que a contração de vértices adjacentes é a operação inversa da subdivisão de aresta.

(3) Nosso resultado $(A1)$ é análogo ao resultado $(A2)$. Nossa demonstração é uma simplificação para o caso em que os vértices contraídos são adjacentes.

Referências

[1] F. Hall, K. Patel and M. Stewart, Interlacing Results on Matrices Associated with Graphs, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, vol. 68, 113-127, (2009).

[2] J. Wang and F. Belardo, A note on the signless Laplacian eigenvalues of graphs, Linear Algebra and its Applications, vol. 435, 2585-2590, (2011).

