Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Emparelhamentos em Grafos e Generalizações

Lilian Cavalet[1]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS
Carlos Hoppen[2]
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS, Porto Alegre, RS

Resumo. Neste trabalho tratamos do emparelhamento em grafos. Nele realizamos uma revisão bibliográfica do assunto, envolvendo definições de emparelhamento, emparelhamento máximo, emparelhamento maximal e emparelhamento estável,o qual busca a melhor forma de arranjar dois conjuntos distintos sujeitos a restrições determinadas por cada elemento de cada conjunto. Posteriormente buscamos um maior aprofundamento teórico a fim de abordar teoremas clássicos da área e abordar problemas mais avançados já propostos.

Palavras-chave. Combinatória, Teoria dos Grafos, Emparelhamento.

1 Introdução

Por meio de conceitos de combinatória buscamos trabalhar com grafos e outras estruturas discretas, as quais tem uma vasta gama de aplicações, como por exemplo, a análise de redes complexas como a Internet, a representação molecular e suas relações.

O trabalho inicia-se com uma revisão bibliográfica referente à busca por um emparelhamento máximo em um grafo, problema clássico no estudo de algoritmos, que pode ser utilizado na determinação do caminho mínimo que cobre um digrafo acíclico, na determinação de rotas veiculares/aéreas, no problema do carteiro chinês, no problema de alocação de tarefas, entre outros. Olhamos especificamente para o problema de emparelhamento estável, usualmente utilizado nos processos seletivos para universidades, na seleção de estagiários e na organização de colegas de quarto.

Futuramente procuramos um maior aprofundamento teórico sobre emparelhamentos estáveis para que sejam compreendidos resultados mais avançados e posterior desenvolvimento de resultados complementares.

2 Revisão Bibliográfica

Iniciamos o trabalho com uma revisão bibliográfica baseada em [2] e [1], onde retomamos conceitos para o desenvolvimento da teoria de emparelhamentos estáveis.

[1]lilian.cavalet@ufrgs.br
[2]choppen@ufrgs.br

Definição 2.1. *Um **emparelhamento** em um grafo G é um conjunto de arestas que não formam laços e que não compartilham vértices finais. Os vértices incidentes às arestas de um emparelhamento M são ditos saturados por M e os outros são ditos insaturados.*

Um emparelhamento pode ser classificado como um **emparelhamento perfeito**, se satura todos os vértices do grafo, um **emparelhamento maximal**, se não pode ser aumentado por meio da adição de uma aresta ou um **emparelhamento máximo**, se possui o maior tamanho entre todos os possíveis emparelhamentos do grafo. Note que todo emparelhamento máximo é maximal, mas a recíproca não é verdadeira.

Teorema 2.1 (Teorema de Hall)**.** *Um (X, Y)-grafo bipartido G tem um emparelhamento que satura X se e somente se $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$, onde $N(S)$ é o conjunto dos vértices que possuem pelo menos um vizinho em S.*

Quando os conjuntos da bipartição têm o mesmo tamanho o **Teorema de Hall** é dito **Teorema do Casamento**. Uma outra versão desse problema é o **problema do casamento estável**: dado um (X, Y)-grafo bipartido G, cujos vértices possuem uma lista ordenada de preferências de adjacência no complementar, busca-se um emparelhamento entre X e Y, seguindo a ordem de preferência dos vértices, de modo que não existam $x \in X$ e $y \in Y$ que prefiram abandonar sua dupla para se emparelharem. Este é dito **emparelhamento estável**.

Teorema 2.2. *Sempre existe um emparelhamento estável em um grafo bipartido G.*

A demonstração deste teorema possui uma versão algorítmica, chamada **Algoritmo de Gale-Shapley**, muito utilizado na admissão de alunos na universidade, no caso do Brasil o método do SISU, entre outros.

3 Conclusão

Atualmente o trabalho está fundamentado na revisão bibliográfica. Visamos desenvolver estudos avançados sobre a teoria de emparelhamento, que incluem o estudo de resultados clássicos, como os Teoremas de König-Hall e Tutte, bem como a estruturação e implementação de algoritmos baseados nestes resultados e suas generalizações.

Referências

[1] D. Gusfield and R. W. Irving, The Stable Marriage Problem, Structure and Algorithms, MIT Press, vol. 54, (1989).

[2] D. B. West, Matchings and Factors, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, Cap. 3, vol. 2, (2001).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0046