

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um novo tipo de método de projeção com diferenças finitas compactas de alta ordem

Gabriela Aparecida dos Reis¹

Italo Valença Mariotti Tasso²

Leandro Franco de Souza³

José Alberto Cuminato⁴

Instituto de Ciências Matemática e de Computação - ICMC, USP, São Carlos, SP.

Resumo Neste trabalho é apresentado um novo tipo de método de projeção que possui quarta ordem de convergência espacial e segunda ordem temporal para a velocidade e pressão. Esse método é particularmente interessante, pois não requer o uso de aproximações para a pressão (na equação do momento) e nem condições de contorno complicadas para a velocidade intermediária. Além disso, trata-se de um método de projeção exata, onde a condição de incompressibilidade é satisfeita exatamente (a menos da precisão de máquina) a cada passo de tempo.

Palavras-chave. Navier-Stokes, método de projeção, diferenças finitas compactas, métodos de alta ordem.

1 Introdução

A dinâmica de um escoamento Newtoniano incompressível descrito pelas equações de Navier-Stokes é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1b)$$

onde ν é viscosidade cinemática, $\mathbf{u} = (u, v)$ o vetor velocidade, p a pressão sobre densidade constante e \mathbf{g} o campo gravitacional. As condições de contorno do tipo Dirichlet para a velocidade são $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b$. Não há condições de contorno para a pressão quando as condições de contorno da velocidade são do tipo Dirichlet.

¹gareis@icmc.usp.br

²italo@tasso.com.br

³lefraso@icmc.usp.br

⁴jacumina@icmc.usp.br

2 Métodos de projeção

Em geral, um método de projeção, com segunda ordem temporal, segue os seguintes passos [3]

Passo 1: Define-se um campo de velocidade intermediário \mathbf{u}^* que pode ser calculado de

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\nabla q - [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}]^{n+1/2} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1/2} + \mathbf{g}^{n+1/2}, \quad (2a)$$

$$B(\mathbf{u}^*) = 0, \quad (2b)$$

onde q representa uma aproximação para $p^{n+1/2}$ e $B(\mathbf{u}^*) = 0$ condições de contorno para \mathbf{u}^* . Cada método especifica escolhas diferentes para q e $B(\mathbf{u}^*)$. Essas escolhas influenciam significativamente a ordem temporal do método.

Passo 2: Faz-se a projeção

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \nabla \phi^{n+1}, \quad (3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (3b)$$

usando condições de contorno consistentes com $B(\mathbf{u}^*) = 0$ e $\mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b^{n+1}$.

Esse sistema reduz-se a uma equação de Poisson quando se aplica o operador divergente a (3a)

$$\nabla \cdot \nabla \phi^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad (4)$$

com condições de contorno $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi^{n+1}|_{\partial\Omega} = \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} - \mathbf{u}_b^{n+1})$.

Passo 3: Atualiza-se a pressão $p^{n+1/2} = q + L(\phi^{n+1})$, onde a função L representa a dependência de $p^{n+1/2}$ sobre ϕ^{n+1} . Essa função depende do tipo de discretização temporal usada nos termos viscoso e convectivo. A nova velocidade \mathbf{u}^{n+1} é calculada por (3a).

2.1 Método de projeção com pressão incremental e livre de pressão

A escolha da aproximação da pressão q , da condição de contorno $B(\mathbf{u}^*)$ e das aproximações temporais para os termos viscoso e convectivo são importantes na determinação do método. As condições de contorno para \mathbf{u}^* devem ser consistentes com a equação (3a), embora essa dependa de valores de ϕ^{n+1} que ainda são desconhecidos e precisam ser aproximados.

Em [2] considera-se $q = p^{n-1/2}$ e $B(\mathbf{u}^*) = (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_b^{n+1})|_{\partial\Omega} = 0$. A pressão é atualizada por $p^{n+1/2} = p^{n-1/2} + \phi^{n+1}$. Essa expressão de atualização da pressão é válida quando se utiliza métodos explícitos para os termos viscoso e convectivo. Se outros métodos não totalmente explícitos forem utilizados para os termos convectivo ou viscoso, mais termos apareceriam na equação da pressão.

Esse método é considerado como sendo um **método de projeção com pressão incremental** (do inglês *incremental-pressure projection method*). A ideia por trás dessa

classe de métodos é que o termo q , que aproxima $p^{n+1/2}$, faça com que \mathbf{u}^* fique mais próximo de \mathbf{u}^{n+1} , e com isso possa se usar as mesmas condições de contorno para ambos.

Por outro lado, em [4] considera-se $q = 0$. Como condição de contorno para \mathbf{u}^* , usa-se $\mathbf{u}^*|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_b^{n+1} + \Delta t \nabla \phi^n|_{\partial\Omega}$. A pressão é dada por $p^{n+1/2} = \phi^{n+1}$, para discretizações temporais explícitas. Visto que não há pressão na equação do momento, esse tipo de método é chamado de **método de projeção livre de pressão** (do inglês *pressure-free projection method*). Isso é interessante pois erros no gradiente da pressão são eliminados da equação do momento, os quais podem se acumular com o tempo.

A falta de consistência na escolha de q e $B(\mathbf{u}^*)$ ou no cálculo de $L(\phi^{n+1})$ pode introduzir erros numéricos não somente nos transientes como também nos estados estacionários. Por exemplo, a escolha $q = 0$ e $B(\mathbf{u}^*) = (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_b^{n+1})|_{\partial\Omega} = 0$ pode introduzir um erro proporcional a Δt nos transientes e no estado estacionário [7].

Além disso, é importante garantir que a cada passo de tempo a condição de incompressibilidade é satisfeita. A próxima seção descreve como isso pode ser garantido.

2.2 Estêncil compatível: projeção exata e projeção aproximada

O fato de um método de projeção ser exato ou aproximado, está relacionado com a resolução da equação de Poisson (4). Quando se resolve esta equação

$$\nabla \cdot \nabla p = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (5)$$

especial atenção deve se ter com o operador $(\nabla \cdot \nabla)$. Enquanto que no caso contínuo esse operador é o mesmo que o laplaciano ∇^2 , no caso discreto isso não é sempre verdade. Em particular, quando se trata de diferenças finitas compactas, não é possível obter um operador laplaciano compacto que seja exatamente igual ao operador $(\nabla \cdot \nabla)$. Se um operador laplaciano compacto for usado em vez disso, o método de projeção não será exato, mas apenas aproximado, e a condição de incompressibilidade será satisfeita a menos da ordem do método [3].

2.3 Projeção exata com diferenças finitas compactas

Para obter um método exato com diferenças finitas compactas, a equação diferencial (4), que é bidimensional e de segunda ordem, pode ser reescrita como

$$p_x - \frac{\partial}{\partial x} p = 0, \quad (6a)$$

$$p_y - \frac{\partial}{\partial y} p = 0, \quad (6b)$$

$$p_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} p_x = 0, \quad (6c)$$

$$p_{yy} - \frac{\partial}{\partial y} p_y = 0, \quad (6d)$$

$$p_{xx} + p_{yy} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right), \quad (6e)$$

que é um sistema de equações diferenciais unidimensionais de primeira ordem, com exceção da última que é puramente algébrica, uma vez que o termo do lado direito pode ser calculado previamente. Desta forma, as diferenças finitas compactas podem ser facilmente aplicadas para discretizar cada equação. Se a mesma discretização for usada para todas as equações, um método de projeção exata será obtido.

Em malhas deslocadas, as quantidades p , p_{xx} e p_{yy} estão no centro das células, enquanto p_x e p_y estão sobre as arestas das células, na mesma posição que u^* e v^* , respectivamente.

Quando se calcula \mathbf{u}^* , assume-se que $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_b^{n+1}$ no contorno, o que é equivalente a considerar $p_x = 0$ e $p_y = 0$ no contorno. Dessa forma, nem u^* , v^* , p_x ou p_y precisam ser calculados no contorno. Essa escolha de condições de contorno não compromete a precisão do método, mesmo no caso de projeção livre de pressão, como será mostrado na seção de resultados.

Essa abordagem tem várias vantagens:

- não é necessário construir estênceis para o operador laplaciano, o que é bastante complexo quando se quer um método exato baseado em diferenças finitas compactas. Este procedimento é, no entanto, possível, mas o estêncil resultante não seria compacto, e poderia se estender ao longo do comprimento do domínio. Um exemplo de como fazer isso pode ser encontrado em [1];
- além de calcular a pressão p , as quantidades p_x e p_y já são calculadas para o próximo passo do método de projeção, ou seja, a correção da velocidade;
- não são necessárias células fantasmas, interpolações ou extrapolações;
- cantos no domínio computacional não necessitam de tratamento especial, uma vez que apenas equações unidimensionais estão presentes.

A única desvantagem encontrada é que o sistema linear é maior em relação ao número de equações e incógnitas. No entanto, a matriz é esparsa quando comparada àquela usada em [1]. Na presente abordagem, cada linha da matriz tem, no máximo, 6 elementos não nulos, independentemente do tamanho do domínio. Em [1], o número de não zeros é proporcional ao comprimento do domínio. Desta forma, um domínio $n \times n$ produziria uma matriz com $\mathcal{O}(n^2)$ não zeros na presente formulação, enquanto que com [1] a matriz poderia ter $\mathcal{O}(n^3)$ não zeros.

3 Resultados

A seguir, três métodos de projeção com diferenças finitas compactas serão analisados: método de projeção livre de pressão e aproximado (LP-A), método de projeção com pressão incremental e aproximado (PI-A) e método de projeção livre de pressão e exato (LP-E). Todos utilizam diferenças finitas compactas de quarta ordem para aproximar as derivadas espaciais. O método de Adams-Bashforth de dois passos (segunda ordem) é usado na discretização temporal [9]. As condições de contorno para a velocidade intermediária \mathbf{u}^* são as mesmas da velocidade \mathbf{u} .

Esses métodos diferem em dois aspectos. Primeiro, os métodos LP-A e LP-E utilizam $q = 0$ em (2a), enquanto o PI-A usa $q = p^{n-1/2}$. Segundo, os métodos LP-A e PI-A resolvem a equação de Poisson discretizando o operador laplaciano como em [5], enquanto o LP-E segue o que foi descrito na seção 2.3.

3.1 Escoamento forçado em uma cavidade

O problema clássico de escoamento laminar dentro de uma cavidade quadrada na qual a tampa se move é simulado. Uma solução analítica para o estado estacionário é conhecida e dada por [8]. O domínio é um quadrado unitário com condições de contorno do tipo Dirichlet.

Observa-se na figura 1a que no LP-A o refinamento da malha deixa de produzir ganho de precisão a partir de um certo nível de refinamento. Com a redução do Δt , figura 1b, há um ganho de precisão para malhas mais finas no estado estacionário. Isso evidencia que esse método introduz um erro proporcional ao Δt e que esse erro está presente inclusive no estado estacionário. Esse resultado é esperado [3], pois as condições de contorno usadas para a velocidade intermediária \mathbf{u}^* são as mesmas da velocidade \mathbf{u} . Como pode ser visto nas figuras 1c e 1d, o erro proporcional ao Δt não é perceptível com o PI-A e LP-E e quarta ordem foi observada em todas as malhas testadas.

A figura 1e mostra a evolução do máximo do divergente discreto. No LP-A, o erro proporcional ao Δt afeta também o divergente. No PI-A, o divergente tem um valor melhor e tende a melhorar à medida que se aproxima do estado estacionário. No entanto, o melhor valor para o divergente é obtido no LP-E. Por se tratar de um método de projeção exato, espera-se um divergente exatamente igual a zero, limitado apenas pela precisão da máquina. O observado na figura 1e está de acordo com essa expectativa.

3.2 Vórtices de Taylor-Green

Os vórtices de Taylor-Green são uma solução analítica para Navier-Stokes geralmente usada para medir a ordem temporal de métodos numéricos [1].

A figura 2 mostra os resultados do teste de convergência temporal. Para os esquemas PI-A e LP-E, foi obtida segunda ordem de precisão, não só para o campo de velocidade, mas também para a pressão. A maioria dos trabalhos na literatura consultada sobre métodos de projeção ou só obtém primeira ordem na pressão ou não reportam a ordem encontrada. Para o esquema LP-A, a adoção de condições de contorno simplificadas para \mathbf{u}^* reduzem a ordem do método para primeira ordem.

4 Conclusões

O esquema LP-E possui a interessante característica de produzir quarta ordem de convergência espacial e segunda ordem de convergência temporal, sem a necessidade de se incluir uma aproximação para o gradiente da pressão na equação do momento e sem a necessidade de corrigir as condições de contorno para \mathbf{u}^* . Além disso, com esse esquema, a

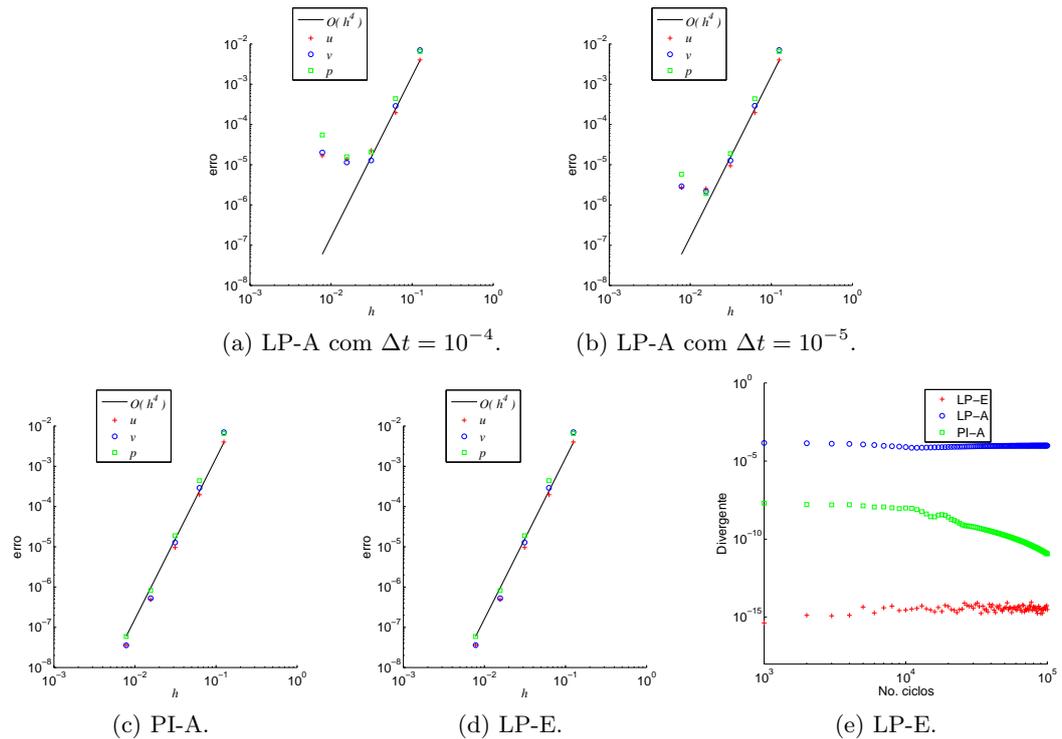


Figura 1: Teste de convergência espacial baseado na solução analítica de estado estacionário apresentada em [8]. O erro é calculado como a diferença entre a solução numérica e a solução analítica na norma L_∞ . A linha contínua representa quarta ordem de convergência. A viscosidade cinemática usada é $\nu = 10^{-2}$, o passo de tempo é $\Delta t = 10^{-4}$ e as malhas foram 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 e 128×128 . $\Delta x = \Delta y = h$. Em 1e é mostrado a evolução do máximo do divergente discreto numa malha fixa 8×8 .

condição de incompressibilidade é satisfeita em todos os passos de tempo de forma exata, a menos de erros de máquina.

Os resultados apresentados aqui foram publicados em *Computers & Fluids* [6].

Agradecimentos

Pelo apoio financeiro, processos nº2012/04471-5 e 2013/21501-8 Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Referências

- [1] S. Abide, and S. Viazzo, A 2D compact fourth-order projection decomposition method, *J. of Comp. Physics*, (2005). DOI:10.1016/j.jcp.2004.12.005.

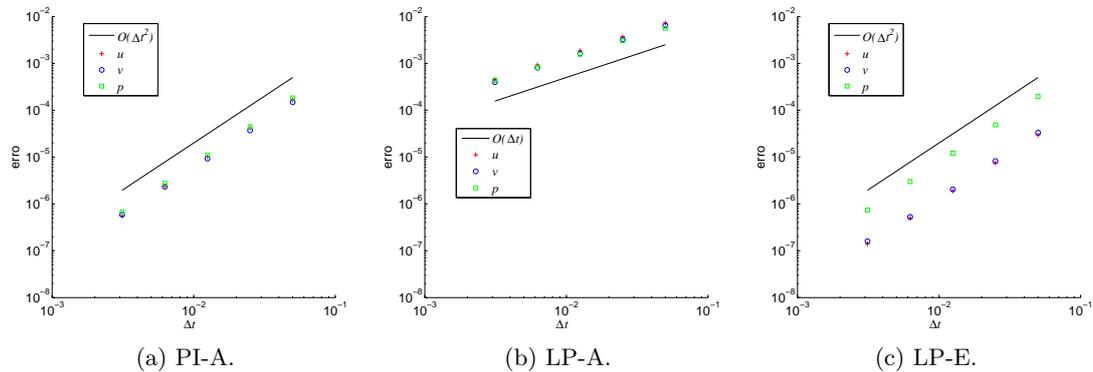


Figura 2: Convergência temporal para o problema vórtices de Taylor-Green. A simulação foi executada até $t = 1$. A viscosidade cinemática usada é $\nu = 10^{-2}$. Os erros são calculados em relação a solução de referência com $\Delta t = 10^{-4}$ na norma L_∞ . A malha é fixa em 20×20 . Em 2a e 2c a linha contínua representa segunda ordem enquanto que em 2b primeira ordem.

- [2] J. B. Bell, P. Colella and H. M. Glaz, A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. of Comp. Physics*, (1989), DOI:10.1016/0021-9991(89)90151-4.
- [3] D. L. Brown and R. Cortez and M. L. Minion, Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comp. Physics*, (2001), DOI:10.1006/jcph.2001.6715.
- [4] J. Kim and P. Moin, Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations, *J. of Comp. Physics*, (1985). DOI:10.1016/0021-9991(85)90148-2.
- [5] S. K. Lele, Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution, *J. of Comp. Physics*, (1992). DOI:10.1016/0021-9991(92)90324-R.
- [6] G. A. Reis, I. V. M. Tasso, L. F. Souza and J. A. Cuminato, A compact finite differences exact projection method for the Navier-Stokes equations on a staggered grid with fourth-order spatial precision, *Computers & Fluids*, (2015), DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.06.015>.
- [7] F. S. Sousa, C. M. Oishi and C. G. Buscaglia, Spurious transients of projection methods in microflow simulations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (2015), DOI:10.1016/j.cma.2014.11.039.
- [8] T. M. Shih, C. H. Tan and B. C. Hwang, Effects of grid staggering on numerical schemes, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, (1989), DOI: 10.1002/fld.1650090206.
- [9] P. Wesseling, *Principles of computational fluid dynamics*, (2009), Vol. 29. Springer Science & Business Media.