

## ESTUDO NUMÉRICO DO EFEITO DE UMA MANOBRA DE SWING-BY CONSIDERANDO O SISTEMA SOL-SATURNO.

GABRIELA MARTINS CRUZ<sup>1</sup>, JORGE K. S. FORMIGA<sup>2,3</sup>, ANTÔNIO F. B. A. PRADO<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidade Estadual Paulista- Júlio de Mesquita Filho, Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333 - Guaratinguetá – SP - 12516-410.

E-mail: gabrielamartinscruz@hotmail.com

<sup>2</sup> Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos, Av. Cesare Mansueto Giulio Lattes, S/Nº - São José dos Campos – SP - 12247-014.

E-mail: formiga.jks@hotmail.com

<sup>3</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais/DMC, Av. Astronautas, 1758 - São José dos Campos - SP - 12227-010.

E-mail: prado@dem.inpe.br

**Abstract** — This paper analyzes the characteristics of an orbital space vehicle, taking into account the gravity assist maneuvers of a particle in the system Sun-Saturn. These maneuvers are called gravity-assisted swing-by maneuvers. In the gravity assist maneuvers, a spacecraft makes a close pass of a celestial body to gain or lose energy, velocity and angular momentum, thus reducing fuel costs for interplanetary missions. The objective of this work is to optimize the trajectory to find this way, energy change through the values of the semi-major axis ( $a$ ) and eccentricity ( $e$ ) before and after each maneuver performed. Performing multiple swing-by maneuvers, you can also analyze the number of operations sufficient to avoid the vehicle colliding with the planet or secondary system defined.

**Keywords** — “Swing-by maneuvers; Semi-major axis; Eccentricity; Energy”.

**Resumo** — Esse trabalho analisa as características orbitais de um veículo espacial, levando em consideração as manobras assistidas por gravidade de uma partícula no sistema Sol-Saturno. Essas manobras assistidas por gravidade são denominadas manobras de *swing-by*. Nas manobras assistidas por gravidade, um veículo espacial faz uma passagem próxima de um corpo celeste para ganhar ou perder energia, velocidade e momento angular, diminuindo assim gastos com combustíveis em missões interplanetárias. O objetivo deste trabalho é otimizar a trajetória para assim encontrar a variação da energia através dos valores do semi-eixo maior ( $a$ ) e da excentricidade ( $e$ ) antes e depois de cada manobra realizada. Na realização de múltiplas manobras de *swing-by*, será possível analisar também o número de manobras suficientes para o veículo escapar ou colidir com o planeta secundário do sistema definido.

**Palavras-chave** — “Manobras de *Swing-by*; Semi-eixo maior; Excentricidade; Energia”.

### 1 Introdução

De acordo com Prado (1995), um veículo espacial é controlado por diversas forças tais como: força gravitacional, força atmosférica, força eletromagnética, pressão de radiação solar, além de seus próprios propulsores. Para determinar a trajetória do veículo espacial em uma missão interplanetária, algumas grandezas físicas tais como a distância e a duração da manobra devem ser decisivas.

Segundo Prado (2001), a determinação das trajetórias em veículos do sistema solar, é de extrema importância para a análise das missões e deve levar em consideração o efeito gravitacional de diversos corpos que podem ser resolvido através de métodos já existentes.

Como descrito na literatura de Prussing (1993), para cada missão interplanetária utilizam-se técnicas para a determinação da trajetória. Nesse trabalho o método utilizado é conhecido como *patched conic*.

Conforme Broucke (1988) e Prado (1993), o método do *patched conic* pode assumir um sistema

formado por três corpos, sendo eles: um corpo primário de maior massa ( $M_1$ ), um corpo secundário de massa finita ( $M_2$ ) e um corpo de massa infinitesimal ( $M_3$ ) o qual orbita o corpo primário.

De acordo com Formiga (2011), o estudo consiste na mudança de trajetória que um veículo espacial de massa infinitesimal ( $M_3$ ) executa quando passa próximo a um corpo de massa  $M_2$  ( $M_2 \gg M_3$ ), com órbita em torno de um corpo de maior massa ( $M_1 > M_2$ ). A aproximação do corpo de massa  $M_3$  com o corpo de massa  $M_2$  gera uma perda ou um ganho de energia devido á manobra de *swing-by* no plano.

O veículo espacial pode ter sua energia, velocidade e, portanto os elementos orbitais alterados após uma passagem próxima do corpo secundário em relação ao corpo primário. As variações são determinadas tendo como base os instantes anteriores e posteriores á passagem próxima, que sempre ocorre em uma região conhecida como esfera de influência. Na Figura 1 pode-se observar uma região em torno do planeta onde se deseja realizar a manobra.

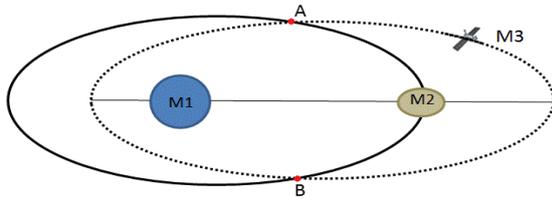


Figura 1- *Swing-by* no Plano. (Adaptado de Prado, 2001).

## 2 Propósitos

O propósito desse trabalho é investigar a variação de energia, variação de velocidade e a variação dos elementos orbitais antes e depois de cada manobra realizada para obter o maior número de possíveis manobras e assim verificar a distância ótima de aproximação que um veículo deve ter para se obter menor consumo de combustível possível. Na simulação de múltiplas manobras de *swing-by*, será possível analisar também o número de manobras suficientes para que o veículo possa escapar ou colidir com o planeta secundário.

## 3 Métodos

Na literatura de Prado (2001) e Broucke (1988) encontra-se o modelo matemático utilizado nesse trabalho, onde podem ser determinados os parâmetros de uma nova trajetória após a manobra realizada, analisando a variação de energia, momento angular e velocidade. A Figura 2 apresenta o *swing-by* no plano e a posição de algumas variáveis que podem ser encontradas através das equações abaixo com as quais se determina os elementos orbitais antes do encontro com o planeta.

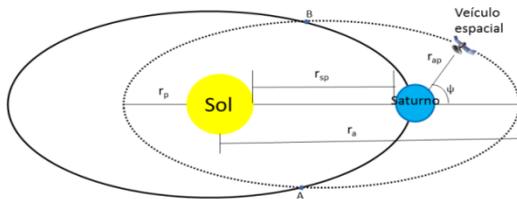


Figura 2- *Swing-by* no plano com as posições dos elementos orbitais.

$$a = \frac{ra + rp}{2} \quad (1)$$

$$e = 1 - \frac{rp}{a} \quad (2)$$

$$E = -\frac{\mu_{Sol}}{2a} \quad (3)$$

$$C = \sqrt{\mu_{Sol} \cdot a(1 - e^2)} \quad (4)$$

Onde:

a= semieixo maior

e= excentricidade

C= momento angular

E= energia

ra= distância do apogeu

rp= distância do perigeu

A magnitude da velocidade do veículo espacial em relação ao Sol no momento que cruza a órbita do planeta ( $v_i$ ) e os dois valores possíveis para a anomalia verdadeira ( $\theta$ ) relacionados respectivamente com os pontos A e B (Figura 2), são obtidas através das seguintes equações.

$$v_i = \sqrt{\mu_{Sol} \left( \frac{2}{r_{ss}} - \frac{1}{a} \right)} \quad (5)$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{1}{e} \left( \frac{a \cdot (1 - e^2)}{r_{ss}} - 1 \right) \quad (6)$$

A seguir, pode-se encontrar o ângulo entre a velocidade inercial e o vetor velocidade do planeta ( $\gamma$ ) e com isso, determinar a magnitude da velocidade do veículo espacial em relação ao planeta no momento do encontro ( $V_\infty$ ).

$$\gamma = \tan^{-1} \left( \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right) \quad (7)$$

$$V_\infty = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \gamma} \quad (8)$$

Na Figura 3, pode-se observar a configuração da magnitude das velocidades, e a determinação do ângulo de aproximação  $\psi$ . Quando a rotação do vetor velocidade está no sentido horário, tem-se  $\psi_1$ , caso a rotação do vetor esteja no sentido anti-horário, teremos  $\psi_2$ .

$$\begin{aligned} \psi_1 &= 180^\circ + \beta + \delta \\ \psi_2 &= 360^\circ + \beta - \delta \end{aligned} \quad (9)$$

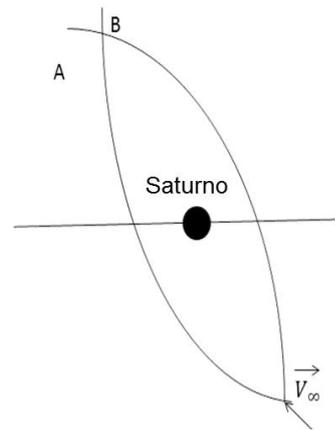


Figura 3- Possibilidades de direção de deflexão do vetor velocidade. (Adaptado de Prado, 2001).

Onde  $\beta$  e  $\delta$  são:

$$\beta = \cos^{-1} \left( -\frac{v_1^2 - v_2^2 - v_\infty^2}{2 \cdot v_2 \cdot v_\infty} \right) \quad (10)$$

$$\delta = \sin^{-1} \left( \frac{1}{1 + \frac{r_{ss} v_\infty}{\mu_p}} \right) \quad (11)$$

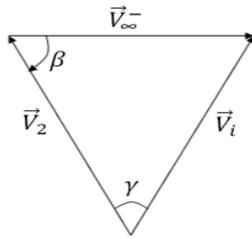


Figura 4 – Soma vetorial envolvida no *swing-by*. (Adaptado de Prado, 2001).

$\mu_p$  é a constante gravitacional do planeta em que é realizada a manobra. Os respectivos valores de  $\psi$ , nos leva as seguintes conclusões sobre a energia após a manobra (PRADO, 2001):

Se a manobra de *swing-by* passa pela frente de  $M_2$ , ( $0^\circ < \psi < 180^\circ$ ), a energia de  $M_3$  decresce e ocorre uma perda máxima quando  $\psi=90^\circ$ .

Se a manobra de *swing-by* passa por trás de  $M_2$ , ( $180^\circ < \psi < 360^\circ$ ), a energia de  $M_3$  aumenta e isso gera um ganho máximo quando  $\psi=270^\circ$ .

Chegamos assim, a última parte do modelo matemático, que consiste na determinação da variação de energia ( $\Delta E$ ) variação de velocidade ( $\Delta V$ ) e momento angular ( $\Delta C$ ) após a manobra.

$$\Delta v = 2|\vec{v}_\infty| \sin \delta \tag{12}$$

$$\Delta E_{n \text{ depois}} = -2 \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_\infty \sin \delta \sin \psi_n \tag{13}$$

$$\Delta C_n = \frac{\Delta E_{n \text{ depois}}}{\omega} \tag{14}$$

Em que  $\omega$  é a velocidade angular entre os corpos primários,  $\delta$  é o ângulo de deflexão e  $\Delta E_n$  é a energia antes do encontro.

Por fim, pode-se encontrar o valor de semi-eixo maior ( $a$ ) e da excentricidade ( $e$ ) depois da manobra utilizando o valor da variação da energia e do momento angular.

$$a_{n \text{ depois}} = -\frac{\mu_{sol}}{2E_{n \text{ depois}}} \tag{15}$$

$$e_{n \text{ depois}} = \sqrt{1 - \left( \frac{C_{n \text{ depois}}^2}{\mu_{sol} \cdot a} \right)} \tag{16}$$

Segundo Felipe (2000) pode-se conferir os resultados das órbitas e classifica-las tendo como referência os valores da energia e momento angular, como pode ser observado na Tabela 1.

Tipo de órbita	Energia	Momento angular
Elíptica direta	Negativa	Positivo
Elíptica retrógrada	Negativa	Negativo
Hiperbólica direta	Positivo	Positivo
Hiperbólica retrógrada	Positivo	Negativo

Tabela 1- Tipos de órbitas

A partir do modelo matemático apresentado, foi desenvolvido um algoritmo para realizar os cálculos para a maior quantidade de manobras realizadas, apresentando a variação da energia com o número de manobras realizadas, excentricidade, semi-eixo maior e momento angular. A Figura 4 apresenta um fluxograma do programa desenvolvido para as manobras de *swing-by*.

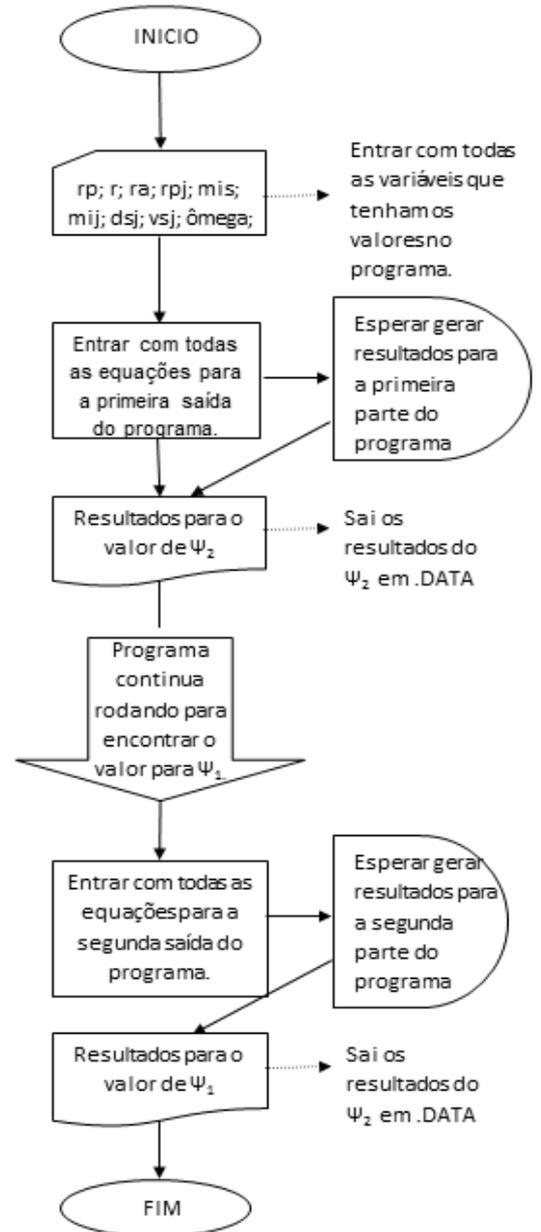


Figura 5- Fluxograma do programa.

#### 4 Resultados

Chamamos de  $\psi_1$  o ângulo que realiza as manobras por trás de Saturno ( $M_2$ ) e  $\psi_2$  é o ângulo que realiza as manobras pela frente de Saturno ( $M_2$ ). A Figura 5 apresenta a obtenção do ângulo  $\psi_1$  e  $\psi_2$ .

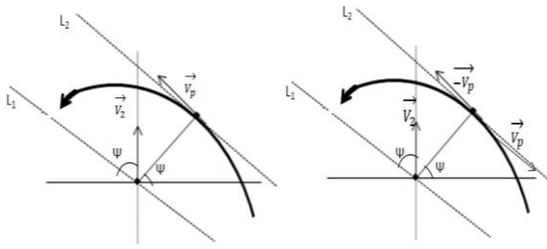


Figura 6- Obtenção do ângulo  $\psi$ , (Adaptado de Prado, 2001).

Ao verificar as simulações, podem-se analisar as variações orbitais do veículo espacial na realização de múltiplas manobras. A tabela 2 apresenta os valores utilizados para a realização das manobras desse sistema.

Tabela 2- Elemento Físico do sistema Sol-Saturno, (Formiga, 2011).

Raio equatorial (km)	Distância média para o Sol ( $10^6$ km)	Velocidade orbital (km/s)	$\mu_{\text{saturno}} =$ Gm ( $10^6 \text{ km}^3/\text{s}^2$ )
60400	1426	9,67	37,37
$\mu_{\text{sol}} = 1,33 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$			

Para gerar gráficos com os valores de  $\psi_1$  e  $\psi_2$  utiliza-se os valores fixos para a distância do apoapsi ( $r_a = 1,572 \times 10^9$  km), distância do periapsi ( $r_p = 150,0 \times 10^6$  km) e velocidade ( $v_2 = 9.67$  km/s). O valor de aproximação do planeta calculado foi de  $r = 1,1R_S$

Pode-se observar pela Figura 7 duas manobras realizadas para  $\psi_1$  onde há um ganho de energia a cada manobra realizada. A amplitude apresentada na Figura 8 ocorre apenas no início das manobras, quando se realiza aproximadamente 100 manobras, a energia se estabiliza tornando irrelevante o efeito do *swing-by*.

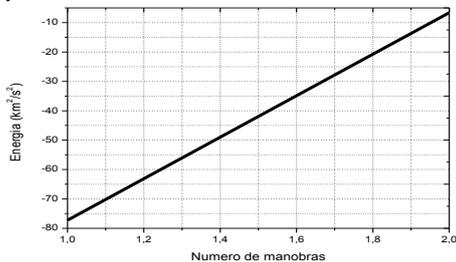


Figura 7- Energia x Número de manobras realizadas para  $\psi_1$  em torno de Saturno.

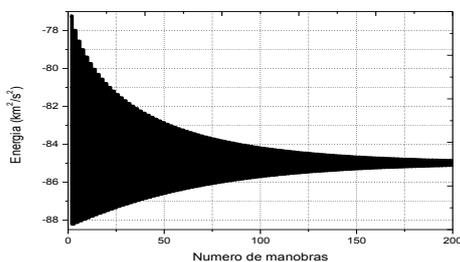


Figura 8- Energia x Número de manobras realizadas para  $\psi_2$  em torno de Saturno.

Observa-se na Figura 9 que a energia aumenta com a excentricidade, a qual tem uma variação maior ao comparar com a Figura 10, onde a excentricidade é pequena e a energia diminui com o aumento da excentricidade.

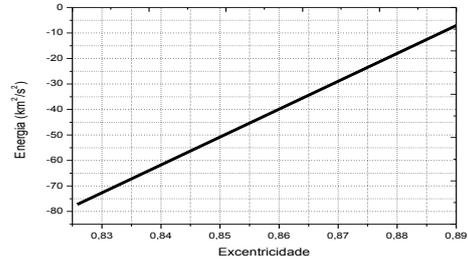


Figura 9- Energia x Excentricidade para  $\psi_1$ .

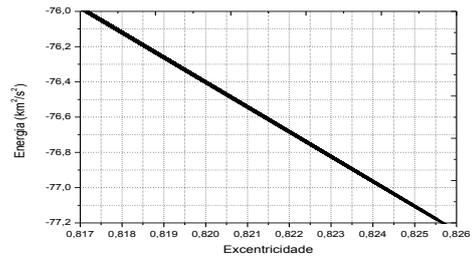


Figura 10- Energia x Excentricidade para  $\psi_2$

Ao comparar as Figuras 11 e 12, nota-se que a energia aumenta de acordo com o semi-eixo maior. Analisando a Figura 12, nota-se que há uma pequena variação no valor do semi-eixo maior.

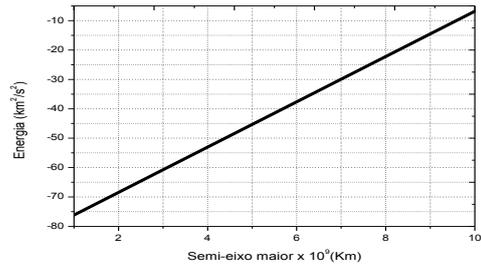


Figura 11- Energia x semi-eixo maior para  $\psi_1$ .

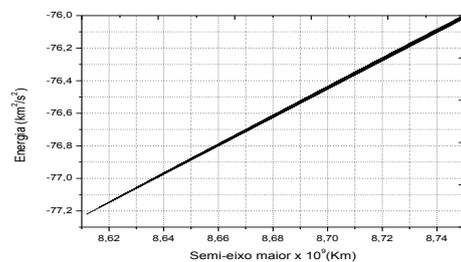


Figura 12- Energia x semi-eixo maior para  $\psi_2$ .

Analisando a energia e o momento angular nas Figuras 13 e 14, pode-se dizer que se trata de uma órbita direta, pois a energia é negativa e o momento angular positivo.

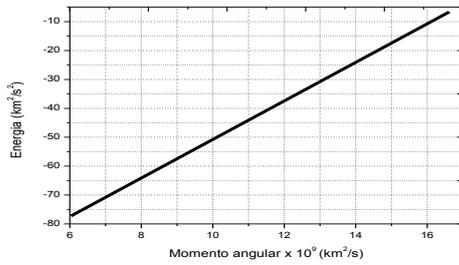


Figura 13- Energia x momento angular para  $\psi_1$ .

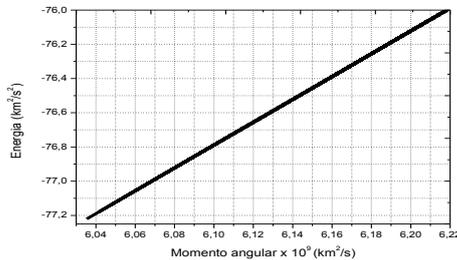


Figura 14- Energia x momento angular para  $\psi_2$ .

Ao relacionar a energia com a velocidade, observa-se nas Figuras 15 e 16 que a energia diminui com o aumento da velocidade. Em ambos os casos a velocidade tem uma variação pequena tendo pouca influência nas manobras de *swing-by*.

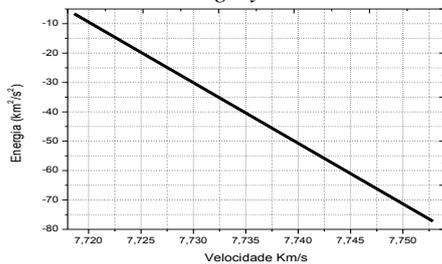


Figura 15- Energia x Velocidade para  $\psi_1$ .

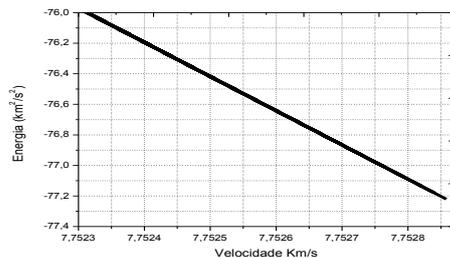


Figura 16- Energia x Velocidade para  $\psi_2$ .

## 5 Conclusão

O objetivo do *swing-by* é de otimizar a manobra e assim minimizar o consumo de combustível para transferir um veículo espacial de um corpo de massa  $M_1$  para um corpo de massa  $M_2$ . O método utilizado nesse trabalho para calcular as variações do *semi-eixo* maior, velocidade, energia e momento angular para o *swing-by* foi desenvolvido com base na manobra de *patched conic*.

Ao usar um conjunto de equações analíticas para descrever o *swing-by* em duas dimensões, pode-se avaliar a variação dos elementos orbitais da órbita do veículo espacial que está passando pelo planeta. Logo, torna-se possível comparar duas solu-

ções para fazer uma manobra orbital considerando os dois ângulos de aproximação  $\psi_1$  e  $\psi_2$ .

Através de várias simulações numéricas realizadas para os sistemas em estudo, foi possível observar que, quando as manobras foram realizadas considerando  $\psi_2$  o veículo espacial adquiriu mais energia fazendo com que o veículo escapasse da órbita para a maioria dos casos analisados. Já considerando o ângulo de aproximação  $\psi_1$ , tivemos apenas uma manobra realizada. Para o caso de  $\psi_2$ , as manobras já não tem mais aplicação prática devido ao período orbital de Saturno de aproximadamente 30 anos.

Em relação à velocidade, percebe-se que o efeito do *swing-by* tem pouca influência para cada manobra realizada. O programa desenvolvido mostrou-se eficaz quando comparado com os resultados já apresentados na literatura de Prado (2001) e também da precisão do método utilizado quando há interesse de desconsiderar outras perturbações.

Com o avanço tecnológico na área de mecânica celeste, pode-se fazer uma análise preliminar dos estudos futuros de manobra de *swing-by*. São previstos estudos para: modelar um sistema com órbitas baixas e montar um sistema no plano tridimensional, com o sistema Terra- Lua.

## Referências Bibliográficas

BROUCKE, R. A., 1988, "The Celestial Mechanics of Gravity Assist". AIAA paper 88- 4220. (In: AIAAAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, MN, 15-17 Aug. 1988.

FORMIGA, J. K. S.; PRADO, A. F. B. A., A study of the effects of a close approach between a planet and a particle. In: 22. ND INTERNATIONAL SIMPOSIUM ON SPACE FLIGHT DYNAMICS, 2011, São José dos Campos. Proceedings. 2011. p.1-10.

PRADO, A. F. B. A., 2001, "Trajetórias Espaciais e Manobras Assistidas por Gravidade". São José dos Campos, INPE , pp. 75-113.

PRADO, A. F. B. A. and KUGA, H. K. 2001, "Fundamentos de Tecnologia Espacial". São José dos Campos, INPE.

PRADO, A. F. B. A. and BROUCKE, R. A., 1995a, "A Classification of Swing-By Trajectories using the Moon". Applied Mechanics Reviews, Vol. 48, No. 11, Part 2, pp. 138-142.