

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um modelo do Método dos Volumes Finitos com malha não estruturada

Antônio Manoel Ferreira Frasson¹

Departamento de Engenharia Elétrica, DEL/UFES, Vitória, ES

Julio Tomas Aquije Chacaltana²

Programa de Pós Graduação em Engenharia Ambiental, PPGEA/UFES, Vitória, ES

Carlos Friedrich Loeffler³

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES, Vitória, ES

Resumo. Este trabalho tem como objetivo testar um modelo do Método dos Volumes Finitos para resolver problemas não homogêneos em dinâmica. Com este objetivo, foi gerado um código com elementos triangulares nas quais se empregam volumes adjacentes de modo auxiliar. Deste modo se estabelece uma compatibilização entre os diferentes volumes finitos em termos das variáveis primais do modelo matemático. O objetivo é resolver, de forma explícita, problemas acústicos não homogêneos, como os que caracterizam os casos típicos de propagação de ondas sísmicas. Com este intuito, neste trabalho são apresentados algumas das simulações realizadas com problemas dinâmicos homogêneos e estacionários heterogêneos, que balizaram a eficiência do método nas comparações realizadas com as respostas analíticas disponíveis.

Palavras-chave. Método dos Volumes Finitos, Malhas não estruturadas, Problemas Heterogêneos, Equação da Acústica.

1 Equação da Acústica

Usando o referencial de Euler e o método de perturbação para obter a aproximação linear das derivadas materiais das equações de movimento, pequenas variações na pressão ocasionam pequenas variações de velocidade e assim se obtêm a seguinte equação diferencial parcial, denominada Equação da Acústica, válida num meio não homogêneo [4]:

¹ antonio.frasson@ufes.br

² juliotac@gmail.com

³ carlosloeffler@bol.com.br

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = E \nabla \cdot \left(\frac{c^2}{E} \nabla P \right) \quad (1)$$

Na equação (1), ρ é a massa específica da partícula, P é a pressão que atua na partícula, u_i é a velocidade da partícula, c é a velocidade do som no meio fluido. Admitiu-se que, numa posição fixa no espaço, o módulo de elasticidade volumétrico E não varia com o tempo.

2 Modelo do Método dos Volumes Finitos

Sem perda de generalidade, soluciona-se o termo difusivo da equação (1) isoladamente da parte dinâmica, que é facilmente operacionalizada através dos esquemas incrementais de avanço no tempo, também empregados nos principais métodos discretos conhecidos [1]. Assim, integra-se o termo difusivo num volume finito genérico \forall de forma que:

$$\int_{\forall} \nabla \cdot (\Gamma \nabla P) d\forall = -S_{\varphi} \quad (2)$$

Na equação (2), S_{φ} é o termo que representa a fonte, Γ representa o quociente c^2/E e a variável φ passa a ser a variável primal do problema, igual a P/E . O foco é desenvolver uma solução numérica em volumes finitos para um triângulo base, em função dos triângulos vizinhos e dos vetores normais unitários nas arestas. A figura 1 ilustra o triângulo base.

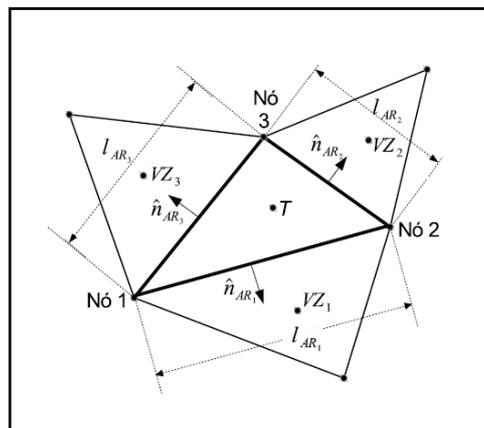


Figura 1: Volume finito base triangular e seus vizinhos.

Demonstra-se que o lado esquerdo da equação (2) pode ser decomposto na soma de três integrais que envolvem as faces do volume triangular, segundo a relação a seguir:

$$\oint_S \Gamma_{\varphi} \nabla \varphi \cdot \hat{n} dS = \int_{S_1} \Gamma_{\varphi_1} \nabla \varphi_1 \cdot \hat{n}_1 dS + \int_{S_2} \Gamma_{\varphi_2} \nabla \varphi_2 \cdot \hat{n}_2 dS + \int_{S_3} \Gamma_{\varphi_3} \nabla \varphi_3 \cdot \hat{n}_3 dS \quad (3)$$

Onde S_1 é a superfície da face que une os nós 1/2, S_2 é a superfície da face que une os nós

S_2 e S_3 é a superfície da face que une os nós 3/1. Cada integral do lado direito da equação (3) pode ser aproximada usando o teorema do valor médio para integrais, o que resulta na seguinte aproximação numérica:

$$\int_S \Gamma_\varphi \nabla \varphi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \Gamma_{\varphi_1} \nabla \varphi_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 l_1 + \Gamma_{\varphi_2} \nabla \varphi_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 l_2 + \Gamma_{\varphi_3} \nabla \varphi_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}_3 l_3 \quad (4)$$

Onde l_i são os comprimentos das arestas e $\hat{\mathbf{n}}_i$ são os vetores unitários normais a estas. Ainda na equação anterior foi empregado o Teorema do Gradiente, dado por:

$$\int_V \nabla \varphi dV = \oint_S \varphi \vec{\mathbf{n}} dS \quad (5)$$

Finalmente, a equação (4) pode ser reescrita como:

$$A_1 \varphi_1 + A_{i1} \varphi_{i1} + A_{i2} \varphi_{i2} + A_{i3} \varphi_{i3} = -S_i^{\varphi n0} - S_i^\varphi = 0 \quad (6)$$

Esta última é a equação algébrica usada para calcular os valores da função φ no baricentro de cada volume ou triângulo da malha e, assim, compatibilizar os elementos e permitir a construção do sistema de equações para os diferentes volumes finitos [2]. Assume-se que os valores de φ nos vértices de cada elemento triangular são conhecidos, a partir da interpolação dos valores de φ do baricentro para os nós [3].

3 Exemplos

3.1 Difusão em meio não-homogêneo

Este primeiro exemplo consiste no cálculo da distribuição estacionária de temperatura em uma placa quadrada, de dimensões unitárias, em que o coeficiente de difusão Γ varia quadraticamente ao longo da direção x , conforme mostra a ilustração à esquerda na Figura 1.

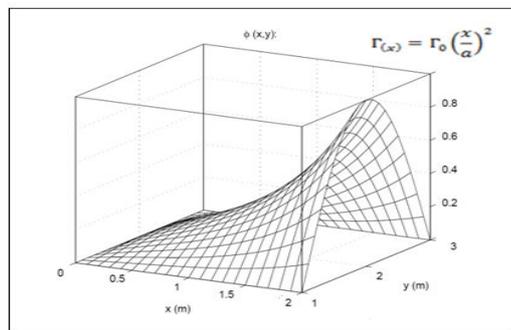


Figura 1- Condições de contorno aplicadas ao primeiro exemplo

As condições de contorno impostas são todas de Dirichlet, sendo nulas em três arestas e apresenta forma senoidal, de amplitude máxima unitária. O coeficiente a também foi adotado unitário.

A malha utilizada na simulação numérica possui 224 volumes finitos, cujo comprimento característico é igual a 0,1. A figura 2 ilustra a forma de discretização, que empregou elementos não estruturados.

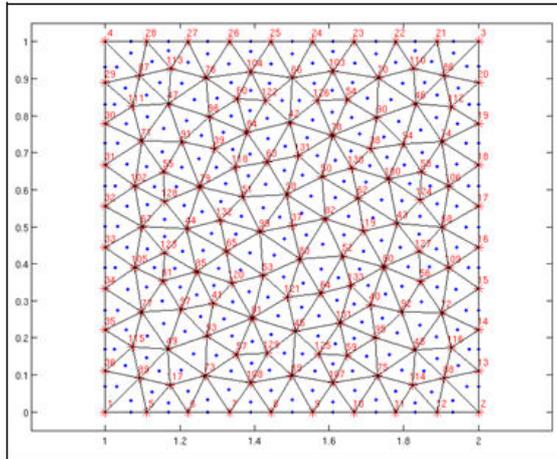


Figura 2- Características da malha empregada

Os resultados em termos do erro médio percentual encontrado para a temperatura no centro das arestas dos volumes finitos é mostrado na figura 3. Percebe-se o bom desempenho do método nesta simulação, pois os maiores erros relativos estiveram na faixa de 0.3%.

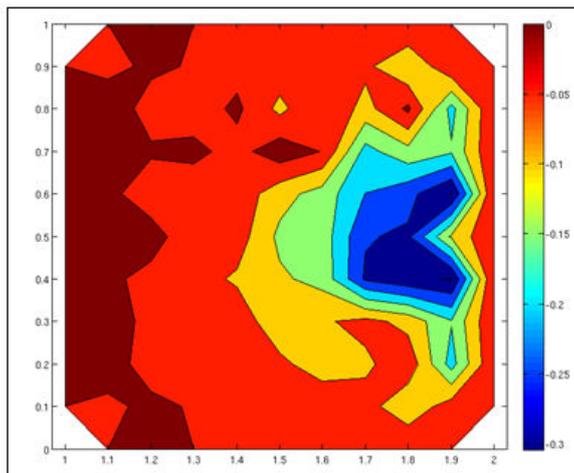


Figura 3- Distribuição do erro ao longo da malha empregada

3.2 Propagação de Onda em meio homogêneo

O objetivo deste exemplo é avaliar se os elementos triangulares não estruturados introduzem dispersão, reflexão e outros fenômenos numéricos típicos de problemas dinâmicos, num caso homogêneo em que se dispõe de solução analítica. Neste sentido, uma membrana completamente fixada em seus bordos é excitada por uma fonte concentrada cuja forma é mostrada na equação (7) a seguir:

$$\frac{\partial^2 P_f}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 e^{-\pi(Bt^2w^2)}}{\partial t^2} = 2\pi Bw^2(1 - 2\pi Bw^2t^2)e^{-\pi(Bt^2w^2)} \quad (7)$$

A figura 4 ilustra o comportamento da onda gerada a partir do centro em alguns instantes selecionados. Enquanto a frente de onda não chega aos bordos, a solução analítica é similar a excitação aplicada, permitindo identificar que a representação da frente de onda e seu perfil à jusante foram bastante satisfatórios. A malha possui 1048 volumes finitos e 565 nós.

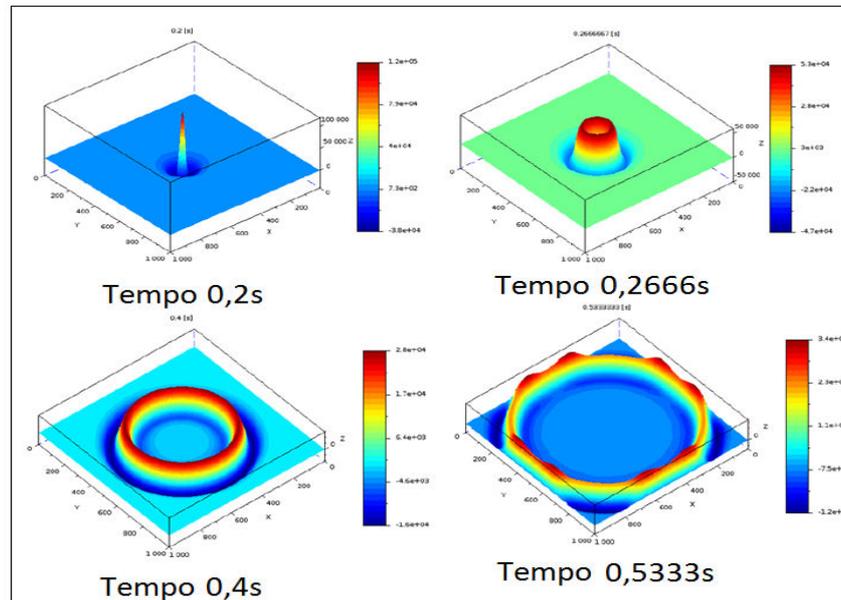


Figura 4- Perfil da frente de onda em alguns instantes.

4 Conclusões

Diversas experiências já realizadas e não mostradas aqui por questões de espaço avalizaram adequação do método dos volumes finitos nas aplicações estacionárias não homogêneas. Testes de convergência com diversas malhas com diferentes graus de refinamento atestaram a diminuição significativa e monótona do erro à medida que o comprimento característico da malha se reduziu. A ausência de fenômenos numéricos

relevantes durante a simulação dos problemas dinâmicos homogêneos igualmente motiva a expectativa de aplicações futuras bem sucedidas em meios heterogêneos, como os que caracterizam as análises da sísmica de prospecção, de grande interesse na atualidade.

Referências

- [1] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, (1982).
- [2] P. A. Chow, M. Cross and K. Pericles, Natural extension of the conventional finite volume method into polynomial unstructured meshes for CFD application, *Applied Math. Modeling*, vol. 20, 170-183, (1996).
- [3] C. Geuzaine and J. F. Remacle, A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, *Int. Journal for Num. Methods in Engineering*, vol. 79, 11, 1309-1331, (2009).
- [4] V. F. Silva, *Estratégias para Estudos de Iluminação Sísmica Baseadas na Equação de Onda*, Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, (2011).