

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Comparação de Desempenho entre o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta e o Método dos Elementos Finitos em problemas de Poisson

Carlos Friedrich Loeffler Neto¹

Pós-graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM, UFES, Vitória, ES

Luciano de Oliveira Castro Lara²

Departamento de Engenharia Mecânica, UFES, Vitória, ES

Hércules de Melo Barcelos³

Pós-graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM, UFES, Vitória, ES

Resumo. O presente trabalho objetiva avaliar o desempenho do MECID (Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta) para resolver o termo integral referente à carga de domínio, característica presente nos problemas modelados pela equação de Poisson. Os dados adquiridos pela aplicação do MECID são comparados com as soluções analíticas disponíveis para os problemas propostos, gerando assim a curva de erro percentual. Para fins de comparação as mesmas ações são tomadas empregando-se o MEF (Método dos Elementos Finitos) baseado na Formulação Clássica de Galerkin, possibilitando assim comparar o desempenho da formulação MECID com um método tradicional, e amplamente utilizado no meio acadêmico e comercial.

Em termos numéricos, sabe-se das dificuldades existentes na aproximação precisa de distribuições mais complexas de cargas, fontes ou sorvedouros no interior do domínio para quaisquer técnicas de contorno. No entanto, este trabalho mostra que, apesar de tais dificuldades, o desempenho do MECID é superior, tanto no cálculo da variável básica, quando na sua derivada.

Para tanto, são resolvidos problemas bidimensionais referentes a membranas elásticas sujeitas à carga de domínio variável, utilizando para isto malhas com diferentes refinamentos, além de elementos lineares com funções de bases radiais para o MECID e funções base de interpolação polinomial de 1º grau para o MEF. Diante dos dados obtidos, são geradas as curvas de desempenho através do cálculo do erro médio percentual global para cada malha, demonstrando assim o desempenho do MECID.

Palavras-chave. Método dos Elementos de Contorno, Método dos Elementos Finitos, Interpolação com Funções Radiais, Formulação Clássica de Galerkin.

¹carlosloeffler@bol.com.br

²castrolara@hotmail.com

³engercules@gmail.com

1 Introdução

Diversos problemas de interesse na Engenharia e na Física podem ser representados matematicamente pela redução dos termos relativos à Equação de Campo Escalar [3] apresentada a seguir:

$$(k_{ij}u_{,j})_{,i} + \lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \lambda_3 u + p = 0 \quad 1.1$$

Na equação anterior u representa um potencial escalar, que pode tomar significados diversos dependendo do problema físico abordado. No caso da deformação em membranas elásticas isotrópicas e homogêneas em regime permanente, que envolvem apenas a presença de fontes ou ações de domínio p , o tensor de propriedades elásticas k_{ij} se degenera na rigidez da membrana k e os escalares λ_i são tomados nulos, de forma que a equação de governo se expressa pela Equação de Poisson, conforme equação (1.2):

$$ku_{,ii} = -p \quad 1.2$$

Em duas dimensões, os índices mudos variam de um até dois.

A solução analítica e numérica desta equação proposta depende intrinsecamente das condições de fronteira, da carga de domínio p aplicada e da geometria do domínio estabelecido.

2 Equações integrais do MECID

Ao utilizar o MECID em sua forma integral, aplicado ao problema de Poisson em um domínio $\Omega(X)$, definindo assim um potencial escalar $u(X)$ com base em fundamentos da Teoria das Equações Integrais e fazendo uso das propriedades da solução fundamental $u^*(\xi; X)$, têm-se [2].

$$\int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma - c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma = \int_{\Omega} p(X)u^*(\xi; X)d\Omega \quad 2.1$$

Conforme apresentado na equação (2.1), a parcela a esquerda da igualdade representa a formulação tradicional do MEC em integrais de linha, ficando a parcela à direita da igualdade integrada em todo domínio. Para esta segunda parcela o MECID [1] propõe a interpolação total do núcleo da integral, isto é:

$$p(X^j)u^*(\xi^i; X^j) = F^j(X^j; X) \xi^i \alpha^j \quad 2.2$$

Utilizando o procedimento MECID [1], a sua equação integral fica expressa da forma.

$$\int_{\Gamma} q(X)u^*(\xi; X)d\Gamma - c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma} u(X)q^*(\xi; X)d\Gamma = \xi^i \alpha^j \int_{\Gamma} \eta^j(X)d\Gamma \quad 2.3$$

A Figura 1 representa bem a distribuição da ação de domínio sobre os pontos internos e geométricos no contorno.

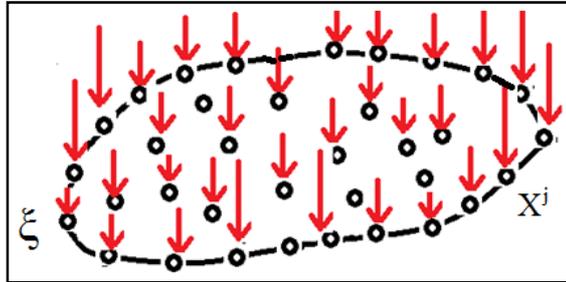


Figura 1: Discretização do domínio com carga distribuída

3 Equações integrais do MEF

O MEF, diferentemente do MECID, baseia-se na discretização do domínio global, através de subdomínios locais $\delta\Omega$. A equação integral apresentada é do tipo fraca [5], obtida através da utilização da função auxiliar $v(X)$ e suas propriedades, expressando-se por:

$$\int_{\Omega} v(X)_{,i} u(X)_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} v(X) p(X) d\Omega + \int_{\Gamma} v(X) h(X) d\Gamma \quad 3.1$$

Onde $h(X)$ representa o valor de fluxo ou condição de Neumann, caso esta seja prescrita. Do mesmo modo que o método MEC, a equação (3.1) trabalha de forma local, gerando uma matriz global, apresentando assim um sistema matricial linear com solução única, dada as suas condições essenciais e naturais.

A malha utilizada para a aplicação do MEF é do tipo estruturada com elementos triangulares, utilizando a função (3.2) para representar a função auxiliar $v(X)$ [5].

$$v(x, y) = a_i + b_i x + c_i y \quad 3.2$$

Onde $v(x, y)$ assume valores nulos nas interseções vizinhas e valor unitário no ponto prescrito ou ponto a ser calculado no elemento finito triangular.

4 Resultados e Discussões

O primeiro exemplo analisado consiste de uma membrana quadrada com lados unitários, governada pela seguinte equação diferencial:

$$\nabla^2 u_{(x_1, x_2)} = (12x_1^2 - 12x_1 + 2)x_2^2(x_2^2 - 2x_2 + 1) + (12x_2^2 - 12x_2 + 2)x_1^2(x_1^2 - 2x_1 + 1) \quad 4.1$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$u_{(0,x_2)} = 0; u_{(x_1,0)} = 0; u_{(x_1,1)} = 0; u_{(1,x_2)} = 0 \quad 4.2$$

A solução analítica para o problema é dada pela expressão:

$$u_{(x_1,x_2)} = (x_1^4 - 2x_1^3 + x_1^2)(x_2^4 - 2x_2^3 + x_2^2) \quad 4.3$$

Pode-se observar o comportamento da ação de domínio sobre a membrana analisada na figura 2, assim como os resultados obtidos com a MECID e MEC na figura 3. Nesta última são traçados gráficos de convergência variando o refinamento da malha para ambos os métodos.

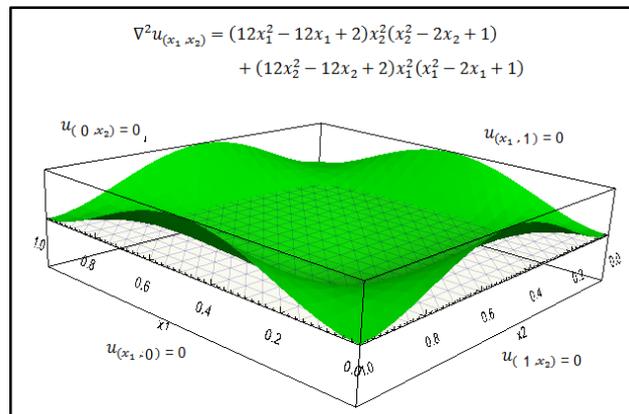


Figura 2: Domínio com as condições naturais prescritas, apresentando a distribuição da ação de domínio.

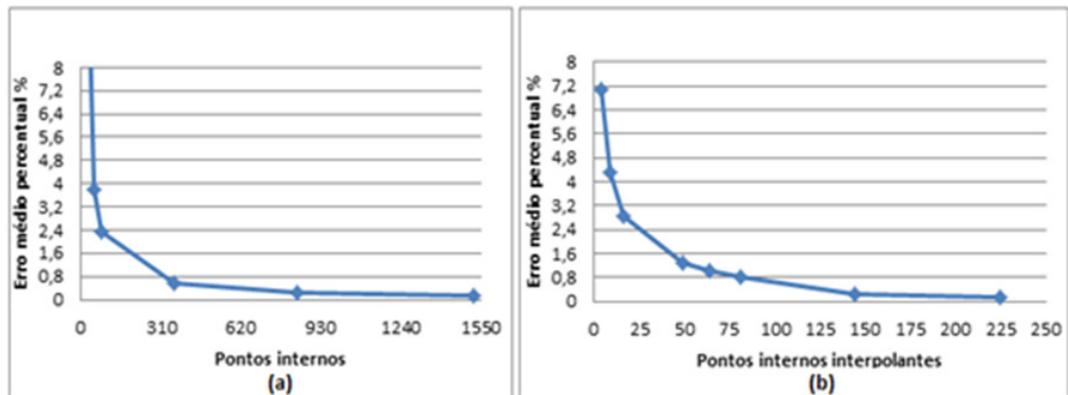


Figura 3: Curvas de erro médio percentual para o MEF em (a) e para o MECID em (b)

Pode-se observar que a MECID pode obter o mesmo nível de precisão que o MEF utilizando um menor número de pontos no interior. Cabe ressaltar que foram usados elementos triangulares no MEF e elementos de contorno retilíneos com interpolação linear na MECID.

O segundo exemplo consiste em uma membrana quadrada com lados unitários governada pela seguinte equação:

$$\nabla^2 u_{(x_1, x_2)} = 6x_1x_2(1 - x_2) - 2x_1^3 \quad 4.4$$

Apresentando as seguintes condições de contorno:

$$u_{(0, x_2)} = 0; u_{(x_1, 0)} = 0; u_{(x_1, 1)} = 0; u'_{(1, x_2)} = 3x_2(1 - x_2)x_1^2 \quad 4.5$$

Destaca-se no conjunto das condições mostradas pela equação 4.5 uma condição de Neumann não homogênea. A solução analítica deste problema é dada por:

$$u_{(x_1, x_2)} = x_2(1 - x_2)x_1^3 \quad 4.6$$

Pode-se observar na figura 4 o comportamento da ação de domínio sobre a membrana analisada. Na figura 5 mostram-se os resultados obtidos pela MECID e MEF. Pode-se perceber um desempenho nitidamente superior da MECID em comparação do MEF neste caso.

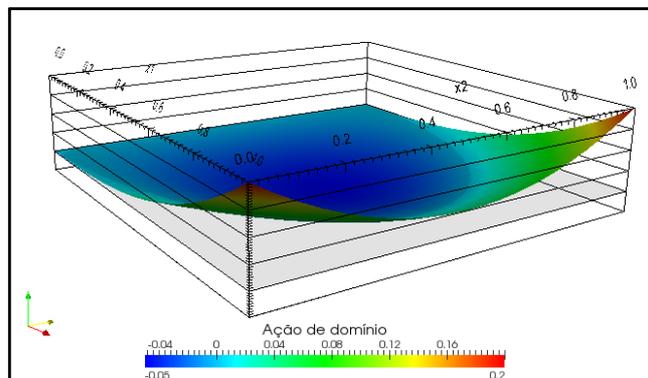


Figura 4: Ação de domínio atuando sobre a Membrana

5 Conclusões

A eficácia de qualquer nova metodologia numérica de solução deve ser condicionada a realização de numerosos testes, em diferentes classes de problemas afins, com o propósito de avaliar de modo seguro o grau de precisão da mesma, garantindo a confiabilidade do

método. Os resultados aqui apresentados mostraram um melhor desempenho do MECID, pois necessitou de um menor refinamento de malha para um mesmo nível de precisão.

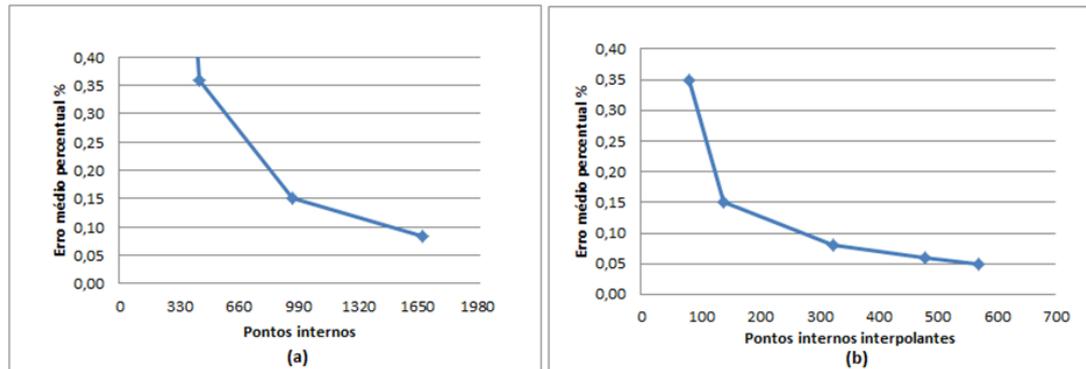


Figura5: Curvas de erro médio percentual para o MEF em (a) e para o MECID em (b)

O bom desempenho do MECID deve-se principalmente a dois fatores: O primeiro é devido ao fato de que o operador de Laplaciano é transformado matematicamente em termos integrais inversas de acordo com os procedimentos típicos do MEC, que são reconhecidamente eficientes. O segundo se deve ao fato de o procedimento MECID ser similar a um processo de interpolação através de funções radiais, que são mais simples e eficazes, apresentando ótima precisão, como atestam as simulações realizadas na representação de imagens e cálculo de superfícies [4].

Referências

- [1] H. M. Barcelos, Comparação de desempenho entre a formulação direta do método dos elementos de contorno com funções radiais e o método dos elementos finitos em problemas de Poisson e Helmholtz, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFES, (2014).
- [2] C. A. Brebbia e S. Walker, Boundary Element Techniques in Engineering, London: Newnes-Butterworths, Cap. II, (1980).
- [3] C. F. Loeffler, Modelos Mecânicos Derivados da Educação de Campo Escalar Generalizada. Revista Militar de Ciência e Tecnologia, vol. 10, 24-38, (1992).
- [4] C. F. Loeffler e A.L. Cruz, Avaliação da Precisão e Outras Propriedades Numéricas na Integração ao Longo de Superfícies Geradas por Funções de Base Radial, Anais do CNMAC, vol. 1, Bauru (2013).
- [5] M. A. Rincon e I.S. Liu, Introdução ao Método dos Elementos Finitos, Computação e Análise em Equações Diferenciais Parciais, UFRJ, Cap. 4, 3ª Ed, (2010).