

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Comparação entre os Métodos dos Elementos de Contorno e das Soluções Fundamentais em Problemas de Laplace

Carlos Friedrich Loeffler<sup>1</sup>

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFES, Vitória, ES

Vinicius Pires Falchetto<sup>2</sup>

Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, UFES, Vitória, ES

**Resumo.** Neste trabalho comparam-se os desempenhos numéricos dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) e Método das Soluções Fundamentais Clássico (MSF) na solução de problemas governados pela Equação de Laplace. São métodos similares, que usam a idéia de uma solução fundamental, mas também apresentam algumas distinções importantes. É possível fazer com que estas diferentes técnicas interajam na solução de alguns problemas mais complexos, o que implica em maior conhecimento das particularidades do MSF, uma vez que o MEC é atualmente uma técnica muito mais conhecida, de reconhecida eficiência em diversas aplicações importantes. Já o MSF experimenta uma redescoberta a partir da intensificação das técnicas de discretização sem malha. Este trabalho compara a precisão dos dois métodos e examina algumas particularidades numéricas de ambos em exemplos simples, mas importantes para a identificação do alcance de cada técnica.

**Palavras-chave.** Método dos elementos de Contorno, Método das Soluções fundamentais, Problemas de Laplace, Comparação entre Métodos Numéricos

## 1 A Equação de Laplace

A Equação de Laplace descreve o comportamento de importantes fenômenos naturais de natureza estacionária. Sua teoria geral de soluções é conhecida como Teoria do Potencial. Assim, dado um meio bidimensional com domínio aberto ou infinito, o potencial  $u^*(\mathbf{X})$  e sua derivada  $q^*(\mathbf{X})$  numa direção  $\eta$ , gerados num ponto campo  $\mathbf{X}=\mathbf{X}(x_1, x_2)$  por uma fonte situada a uma distância euclidiana  $r$  deste são dados por [1]:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad q^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (1).$$

---

<sup>1</sup> carlosloeffler@bol.com.br

<sup>2</sup> vfallchetto@gmail.com

A independência angular destas equações simplifica bastante seu equacionamento.

## 2 O Método dos elementos de Contorno

A equação integral básica do MEC para problemas de Laplace é dada por:

$$c(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X})q(\mathbf{X})d\Gamma - \text{CPV} \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X})u(\mathbf{X})d\Gamma \quad (2).$$

Na equação anterior,  $u(\mathbf{X})$  é o potencial e  $q(\mathbf{X})$  é sua derivada normal externa no contorno  $\Gamma$  de um problema a ser resolvido, onde condições essenciais e naturais são prescritas. As integrais são impróprias convergentes, sendo que a segunda no lado direito da igualdade deve ser calculada no sentido de valor principal de Cauchy (CPV) [2]. O posicionamento adequado dos pontos fonte  $\xi$  permite não apenas o cálculo das funções  $u^*$  e  $q^*$ , que atuam como funções auxiliares na forma integral apresentada pela equação (2), como também facultam sejam coincidentes com as coordenadas dos pontos campo  $\mathbf{X}$ , que geram valores nodais do potencial  $u(\mathbf{X})$  e sua derivada  $q(\mathbf{X})$  após o processo de discretização. Um procedimento matemático engenhoso define o valor de  $c(\xi)$ , que é unitário para pontos internos, nulo para pontos externos e igual a meio para contornos suaves [1].

De acordo com o procedimento clássico do MEC [2], para cada ponto fonte  $\xi$  realiza-se uma varredura sobre todo o contorno (vide figura 1), que é discretizado em elementos sobre os quais se define uma aproximação das variáveis  $u(\mathbf{X})$  e  $q(\mathbf{X})$ , definindo a ordem do elemento de contorno. Assim, gera-se um sistema de equações na seguinte forma:

$$\begin{aligned} H_{11}u_1 + \dots H_{1n}u_n &= G_{11}q_1 + \dots G_{1n}q_n \\ H_{21}u_1 + \dots H_{2n}u_n &= G_{21}q_1 + \dots G_{2n}q_n \\ &\dots\dots\dots \\ H_{n1}u_1 + \dots H_{nn}u_n &= G_{n1}q_1 + \dots G_{nn}q_n \end{aligned} \quad (3).$$

## 3 O Método das Soluções Fundamentais

O MSF é mais antigo e mais básico em seus princípios do que o MEC, pois é diretamente fundamentado na ideia das funções de Green [4]. Para a modelagem do MSF deve ser inserida uma série de pontos de colocação sobre o contorno onde o problema será analisado. Nestes pontos são prescritas as condições de contorno. Embora o método não requeira uma discretização explícita, a geometria do problema físico e suas condições de contorno devem ser rigorosamente computadas.

Similarmente ao MEC, também deve ser inserida uma série de pontos fonte, mas

estes devem se situar externamente ao contorno, formando uma fronteira fictícia que circunscreve a geometria do problema físico. Isto será ilustrado mais à frente, na figura 1. O número de pontos fonte aqui utilizado foi igual ao número de pontos de colocação, por apresentar melhor precisão [3], mas existem outras técnicas, mais elaboradas, que operacionalizam o MSF de modo diferente.

Em termos de equacionamento, admitindo-se então que dado um conjunto de  $n$  fontes e igual quantidade de pontos de colocação, pode-se escrever a seguinte relação de influência entre potenciais, com base na equação (1):

$$\begin{bmatrix} u^*(1,1) & u^*(1,2) & \dots & u^*(1,n) \\ u^*(2,1) & u^*(2,2) & \dots & u^*(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^*(n,1) & u^*(n,2) & \dots & u^*(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ u_2 \\ \dots \\ \bar{u}_n \end{bmatrix} \quad (4).$$

Escreve-se uma relação similar, envolvendo agora suas derivadas normais:

$$\begin{bmatrix} q^*(1,1) & q^*(1,2) & \dots & q^*(1,n) \\ q^*(2,1) & q^*(2,2) & \dots & q^*(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q^*(n,1) & q^*(n,2) & \dots & q^*(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \bar{q}_2 \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (5).$$

Nas equações (4) e (5),  $\bar{u}$  e  $\bar{q}$  são, respectivamente, os valores conhecidos do potencial e da sua derivada normal nos pontos de colocação. Percebendo-se que os  $n$  coeficientes de influência  $c_i$  são os mesmos em ambas as matrizes, podem-se combinar as linhas de ambas gerando um novo sistema, no qual o vetor situado à direita da igualdade matricial é composto exclusivamente de valores prescritos. Isto permite determinar todos os coeficientes de influência, pela solução do seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} u^*(1,1) & u^*(1,2) & \dots & u^*(1,n) \\ q^*(2,1) & q^*(2,2) & \dots & q^*(2,n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^*(n,1) & u^*(n,2) & \dots & u^*(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \dots \\ \bar{u}_n \end{bmatrix} \quad (6).$$

## 4 Exemplos

### 4.1 Problema Unidimensional - Barra Engastada numa extremidade

O problema a seguir pode ser interpretado como de uma barra quadrada de lados unitários tracionada na direção horizontal, de acordo com as condições de contorno mostradas na figura 1(a). Tanto no MSF quanto no MEC e em ambos os métodos foram usadas quatro diferentes discretizações, com 12, 20, 36 e 44 pontos de colocação.

Na resolução do problema pelo MEC foram utilizados elementos retos com interpolação das variáveis de campo linear com nós duplos, para atender a possível dualidade de condições de contorno nos cantos [2].

No caso MSF foram resolvidos, para cada quantidade de pontos no contorno, dois diferentes arranjos de pontos fontes: o arranjo circular, em que os pontos fontes ficam dispostos igualmente espaçados numa circunferência fictícia concêntrica, conforme a figura 1(b); e o arranjo quadrático, em que os pontos fontes são posicionados a uma distância  $d$  na direção normal ao ponto de colocação correspondente, figura 1(c).

Calculou-se o erro pela somatória das diferenças entre o resultado numérico e o valor analítico em cada ponto, dividida pelo maior valor analítico e pela quantidade de pontos. Montaram-se curvas de convergência para cada arranjo de pontos fonte, conforme mostra a figura 2.

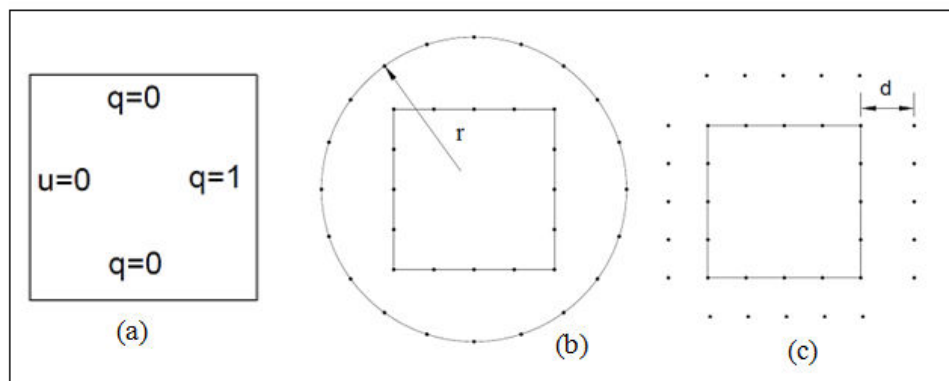


Figura 1 – Configuração geométrica da barra quadrada com condições de contorno impostas e arranjos de pontos de colocação usuais com o MSF

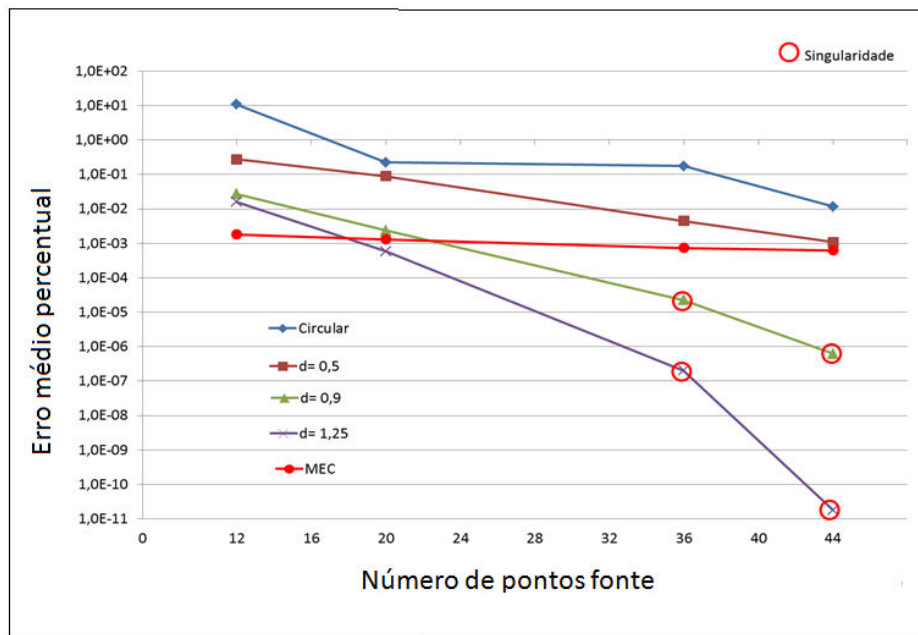


Figura 2 – Curvas de erro para diferentes arranjos de pontos – primeiro exemplo

Percebe-se nesta figura a estabilidade dos resultados do MEC com relação ao refinamento da malha, pois que o problema é bem simples, no qual o campo de deslocamentos é linear. Já os resultados do MSF somente superam o MEC no caso dos arranjos quadráticos, mas nestes, à medida que o afastamento cresce, ocorre singularidade, pois as linhas das matrizes se tornam muito semelhantes. Não há ainda unanimidade na literatura com relação aos limites deste afastamento, pois há uma dependência da geometria e das condições de contorno aplicadas.

#### 4.2 Segundo exemplo - chapa sob gradiente térmico

A figura 3 apresenta as características geométricas e físicas do problema. Trata-se de uma chapa quadrada de lados unitários, cujas condições de contorno não são constantes ao longo das duas arestas. A distribuição do potencial de temperaturas e fluxos agora é bidimensional. Além dos mesmos arranjos de malhas e distribuições de fontes e de colocação empregadas no exemplo anterior, foram também usadas malhas mais refinadas, tanto no MSF quanto no MEC, pois que a dificuldade numérica para solução deste exemplo é maior.

De fato, os resultados numéricos agora foram bem diferentes. Particularmente com o MSF houve perda de precisão com o refinamento da malha para distribuições de pontos fonte mais afastadas. Também neste exemplo a distribuição circular das fontes teve um pior comportamento se comparada às demais. Quanto ao MEC, embora apresente resultados de qualidade inferior para as malhas pouco refinadas, reduz monotonicamente o erro à medida que se amplia a quantidade de pontos fonte.

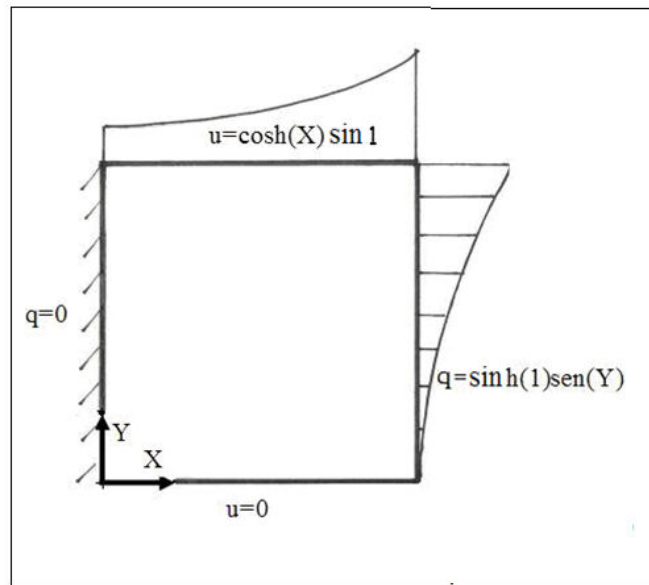


Figura 3 – Chapa quadrada com condições de contorno variáveis

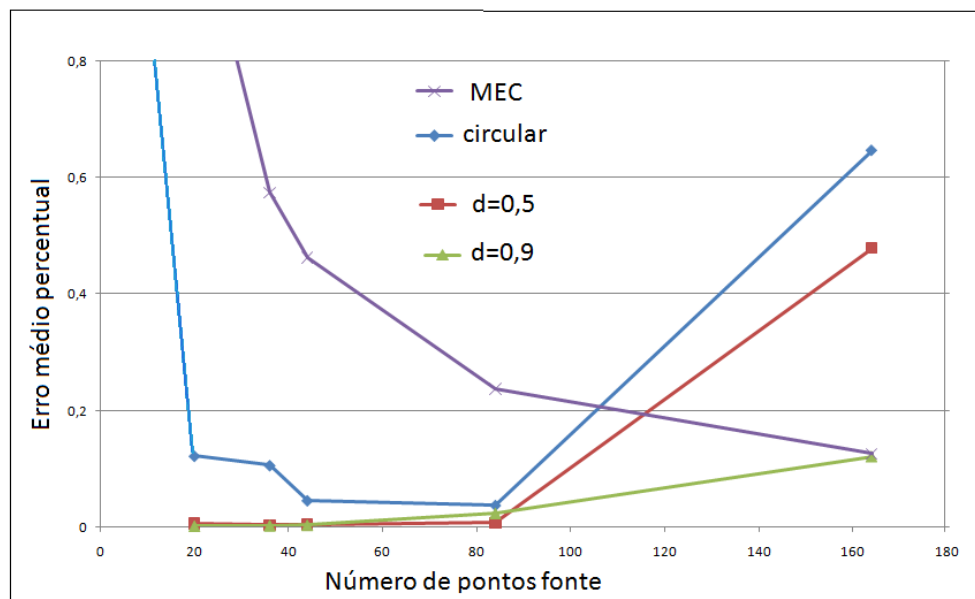


Figura 4 – Curvas de erro para diferentes arranjos de pontos – segundo exemplo

## 5 Conclusões

O MSF é um dos mais simples métodos numéricos na atualidade. Praticamente redescoberto há alguns anos, tem sido empregado com êxito na análise acústica, em

problemas cujas fronteiras apresentam certa simplicidade e regularidade. Não obstante este sucesso, ainda há muitas dúvidas com relação à identificação de parâmetros que cercam sua aplicação generalizada, pois que há uma tendência em calibrar o método diante de problemas cuja conformação geométrica se repete.

O desempenho do MEC se mostra mais robusto e apresenta uma curva de convergência nítida com o refinamento da malha em todos os casos melhor, o que não acontece com o MSF. As variações das condições de contorno, embora também afetem o MEC, pois quanto mais complexas maiores são as necessidades de maior refinamento da malha, mostraram-se muito mais sérias no MSF, em exemplos que não puderam ser aqui apresentados. Foi nítido que nestes casos que há uma tendência ainda maior à instabilidade numérica.

Também muito comum foi a geração de um sistema de equações singular no MSF, devido ao afastamento dos pontos fonte, em alguns casos para distâncias não tão excessivas assim, relativamente às dimensões geométricas do problema. Embora não tenham sido resolvidos, sabe-se que o MSF não é eficiente diante de problemas com contornos irregulares e, particularmente, situações em que existam reentrâncias, casos nos quais o MEC se mostra bem mais adequado.

Por fim, deve-se ressaltar a carência de uma bibliografia que apresente minuciosamente os testes com problemas governados pela Equação de Laplace, etapa importante antes da solução de problemas mais complexos que envolvem operadores diferenciais ainda mais elaborados.

## Referências

- [1] C.A. Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, (1978).
- [2] C. A. Brebbia, S. Walker, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, (1980).
- [3] G. C. de Medeiros, *O método das Soluções Fundamentais com Reciprocidade Dual para Problemas de Potencial*, Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, (2001).
- [4] H. F. Weinberger, *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales*, Editorial Reverte, Barcelona, (1970).