Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Soluções aproximadas estáveis através de métodos de projeção em subespaços de Krylov

Eduardo Pandini Barros[1]
Departamento de Matemática, UFSC, Florianópolis, SC
Dr. Fermín S. V. Bazán [2]
Departamento de Matemática, UFSC, Florianópolis, SC

Resumo. Solucionar sistemas de equações lineares é um problema relevante das ciências aplicadas. É importante se preocupar com métodos computacionais que tornem a abordagem de sistemas de grande porte viável e precisa. Nesse contexto, os métodos iterativos surgem como opção mais eficiente do ponto de vista computacional, destacando-se dentro desta categoria os métodos de projeções em subespaços de Krylov, que tem como principal característica a resolução de sucessivos sistemas lineares de menor porte. Como principal consequência, após poucas iterações (projeções) é possível capturar as principais informações do problema e se obter um resultado muito satisfatório. Em aritmética exata, tais métodos convergem para a solução exata em, no máximo, n passos, em que n é o tamanho da matriz. Porém, em uma implementação real é conveniente estudar os efeitos produzidos por ruídos nas entradas de dados, ou seja, a construção de soluções estáveis.

Palavras-chave. Métodos Iterativos, Projeções, Krylov.

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos métodos computacionais baseados em projeções em subespaços de Krylov para construir soluções aproximadas de sistemas de equações lineares,

$$Ax = b, \tag{1}$$

sendo A uma matriz $n \times n$, com foco em problemas de grande porte. Para tanto, apresentamos definições e principais propriedades dos subespaços em questão, e então introduzimos a ideia de projeção na qual estão baseados os métodos.

Sejam A matriz $\in \mathbb{C}^{n\times n}$ e b vetor $\in \mathbb{C}^n$. Um *subespaço de Krylov* é o espaço gerado $\mathcal{K}_k(A,b) := \langle b, Ab, A^2b, \ldots, A^{k-1}b\rangle$. Observamos que os vetores da base $\beta := \{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{k-1}b\}$ tendem para um autovetor associado ao autovalor dominante da matriz A, tendendo portanto a ficarem cada vez mais próximos da dependência linear, tornando-se assim inadequados para a utilização em implementações numéricas. Na busca

[1]eduardohiru@gmail.com
[2]fermin.bazan@ufsc.br

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0076

© 2015 SBMAC

de uma base base mais estável para o subespaço de Krylov, apontamos para bases ortonormais. Mostraremos que o algoritmo de Arnoldi nos dá uma base com essas propriedades e constitui peça fundamental para certos métodos de projeção em subespaços de Krylov.

A ideia dos métodos apresentados neste trabalho é construir aproximações para a solução do sistema (1) no subespaço de Krylov através de uma base ortonormal para este subespaço. Diferentes maneiras de construir a base e diferentes maneiras de determinar os coeficientes da combinação linear que define a solução aproximada resultam em diferentes métodos. Um outro aspecto abordado neste trabalho é a analise dos efeitos causados por perturbações nas entradas do lado direito do sistema na sequência gerada pelos métodos bem como os meios de corrigir instabilidades nas aproximações.

2 Métodos de projeção

Dados dois subespaços $\mathcal{K}_\mathrm{k}$ e $\mathcal{L}_\mathrm{k}$ de $\mathbb{C}^\mathrm{n}$, ambos com dimensão k, dado um vetor inicial x_0, um método de projeção consiste em construir uma sequência $\{x_n\}$ em $\mathbb{C}^n$ tais que

$$c_\mathrm{k} := x_\mathrm{k} - x_0 \in \mathcal{K}_\mathrm{k} \qquad r_\mathrm{k} := b - Ax_\mathrm{k} \perp \mathcal{L}_\mathrm{k}$$

Quando os subespaços são de Krylov, estes são denominados *Método de Projeção em Subespaços de Krylov.* Dentre os métodos mais conhecidos destacam: o método da ortogonalização completa (FOM), o método dos Resíduos Mínimos Generalizados (GRMES), o método dos Gradientes Conjugados (CG) e o *Least Squares QR* (LSQR). Em todos estes métodos, a sequência $\{x_\mathrm{k}\}$ converge para a solução de $Ax = b$ [1,2] após, no máximo, n passos. Neste trabalho consideramos o problema de construir soluções estáveis para o sistema linear (1), utilizando-se $\widetilde{b} = b + \varepsilon$ ao invés de b, sendo ε um vetor de incertezas. Essa situação é típica em aplicações reais. A questão natural que surge é qual a relação entre a solução x do problema (1) e a sequência $\{x_\mathrm{k}\}$ gerado por um Método de Projeção em Subespaço de Krylov com vetor $\widetilde{b}$ em lugar de b? A resposta, em geral, é a semi-convergência do algoritmo: no começo das iterações as iteradas $\{x_\mathrm{k}\}$ tendem a aproximar a solução x até um número de passos em que a qualidade é ótima, com a complicação que a qualidade da aproximação deteriora quando esse número ótimo de passos é ultrapassado. Neste trabalho estudamos um critério de parada baseado no comportamento do princípio da discrepância que consiste em determinar o primeiro k tal que a $\|r_\mathrm{k}\| \leq \tau\|e\|$ em que r_k é o resíduo na iteração k $(Ax_\mathrm{k} - b)$ e $\tau \approx 1$.

Referências

[1] L. Carvalho, S. Gratton, R.Lago e N. Maculan. Álgebra Linear Numérica e Computacional - Métodos de Krylov para Solução de Sistemas Lineares. Editora Ciência Moderna,2010

[2] L. Trefethen and D. Bau, III. Numerial Linear Algebra. Society of Industrial and Applied Mathematics, 1997

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0076 © 2015 SBMAC