Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Métodos iterativos eficientes para a Pseudo-Inversa com aplicações na construção de soluções aproximadas para sistemas lineares de grande porte

Everton Boos[1]

Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis, SC

Fermín S. V. Bazán[2]

Departamento de Matemática, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, UFSC, Florianópolis, SC

Resumo. Neste trabalho apresentamos métodos iterativos para o cálculo da matriz pseudo-inversa, juntamente com resultados pertinentes sobre convergência. Além dos aspectos teóricos, são apresentadas implementações práticas no ambiente Matlab. Visto que o cálculo explícito da pseudo-inversa não é de interesse quando a matriz é de grande porte, são apresentadas versões vetoriais dos métodos baseadas em produtos matriz vetor, que convergem à solução do problema de mínimos quadrados.

Palavras-chave. Pseudo-inversa, Métodos iterativos, Sistemas lineares, Problemas de mínimos quadrados.

1 Introdução

O problema de resolver sistemas de equações lineares é assunto recorrente em diversas áreas das ciências aplicadas. Em geral, trata-se de resolver problemas da forma

$$Ax = b, \qquad \text{ou} \qquad \min \|Ax - b\|_2,$$

com $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, e $x \in \mathbb{C}^n$ (vetor de incógnitas). Quando o sistema admite solução única, ela é dada por $x = A^{-1}b$ ou por $A^{+}b$ em que A^{+} é a matriz pseudo-inversa de A [2]. É sabido que computar a matriz inversa não é recomendável devido ao alto custo computacional, portanto, o cálculo do produto $A^{-1}b$ pode ser inviável. A mesma observação é válida para o caso do produto $A^{+}b$.

Para contornar as dificuldades apontadas acima, partimos para métodos iterativos para aproximar a pseudo-inversa, mas tendo em mente que, ao invés de aproximarmos a

[1]everton_boos@grad.ufsc.br
[2]fermin.bazan@ufsc.br

Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.

própria pseudo-inversa, o principal objetivo é calcular aproximações do efeito dela quando aplicada ao vetor b.

Em termos matemáticos, numa primeira etapa a ideia é gerar uma sequência $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de matrizes de modo que $X_k \longrightarrow A^+$, quando $k \longrightarrow \infty$. Tendo garantida a convergência de $X_k \longrightarrow A^+$, a ideia da segunda etapa é construir uma sequência de vetores $x^{(k)} \in \mathbb{C}^n$, baseada na sequência X_k, e analisar sob quais condições, $x^{(k)} \longrightarrow A^+b$.

2 Os métodos iterativos

Em geral, utilizamos uma aproximação inicial $X_0 = \beta A^*$, para β satisfazendo certas condições, e uma sequência de matrizes $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definidas na forma

$$X_{k+1} = X_k + C_k T_k,$$

com C_k e T_k escolhidas de diferentes formas. Esta parte do estudo está baseada na referência [1]. Basicamente, se forem feitas escolhas corretas para as matrizes C_k e T_k, prova-se que $X_k \longrightarrow A^+$, quando $k \longrightarrow \infty$. Obviamente, do ponto de vista computacional, realizam-se apenas uma certa quantidade de iterações até um critério de parada ser satisfeito. Notamos que, a partir da aproximação X_k obtida, uma solução aproximada para o sistema linear ou para o problema de mínimos quadrados é obtida imediatamente através do produto $X_k b$. A outra alternativa é gerar a sequência de vetores

$$x^{(k)} = X_k b \in \mathbb{C}^n,$$

interrompendo o processo através de um critério de parada apropriado. Se A é de grande porte, é evidente que é mais econômico usar a sequência vetorial do que a sequência matricial.

Apresentamos resultados numéricos mostrando que os métodos iterativos apresentam convergência rápida à pseudo-inversa. Os métodos baseados em sequências vetoriais para aproximar A^+b estão em fase de implementação e análise.

Referências

[1] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, Generalized inverses: theory and applications, Springer, 2nd edition, (2003).

[2] C. D. Meyer, Matrix analysis and applied linear algebra, SIAM, (2000).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0069