Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Oscilador Harmônico Fracionário

Lucas Kenjy Bazaglia Kuroda,[1] Robinson Tavoni[2]
Instituto de Biociências, IB, Botucatu, SP,
Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP
Rubens de Figueiredo Camargo[3]
Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP

Resumo. Neste trabalho apresentamos a modelagem fracionária, isto é, a modelagem feita a partir de equações diferenciais de ordem não inteira, aplicada à equação do oscilador harmônico simples, com o intuito de analisar o comportamento desta equação para diferentes valores da ordem da deriva fracionária. Mostramos, neste caso, que esta modelagem nos permite descrever este fenômeno de maneira mais realista, considerando assim atritos e forçar externas atuando sobre o sistema.

Palavras-chave. Modelagem Fracionária, Oscilador Harmônico, Derivada Fracionária de Caputo, Oscilador Harmônico Fracionário.

1 Introdução

A importância do oscilador está no fato de ser o protótipo mais geral de um sistema físico que envolva oscilações. Entre os problemas tratados com o modelo do oscilador harmônico citamos as vibrações acústicas, massas ligadas a molas, pêndulos, dentre outros. Quando aplicamos a modelagem fracionária em uma equação diferencial que descreve um fenômeno físico, espera-se que ao diminuir a ordem da derivada obtemos uma descrição mais precisa do fenômeno estudado. Neste trabalho, aplicamos a modelagem fracionária utilizando a derivada fracionária no sentido de Caputo no problema do oscilador harmônico simples (sem atritos e forças externas) e comparamos o resultado fracionário com os hosciladores harmônicos simples e amortecido.

2 Oscilador Harmônico Fracionário

Seja $\omega^2 = \frac{k}{m}$ (constante sobre a massa) e considerando que não há atritos nem forças externas atuando sobre o sistema, temos

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{1}$$

[1]lucaskuroda@ibb.unesp.br
[2]tavoni@ibb.unesp.br
[3]rubens@fc.unesp.br

Substituindo a derivada de ordem 2 da equação (1), por uma de ordem $1 < \beta \leq 2$ no sentido de Caputo, e considerando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $x'(0) = 0$, temos a seguir a equação com a respectiva solução.

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta}x(t) + \omega^\beta x(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = x_0 E_\beta(-\omega^\beta t^\beta), \tag{2}$$

na qual $E_\beta(-\omega_0^\beta t^\beta)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro [2] e a solução foi obtida através da transformada de Laplace [3].

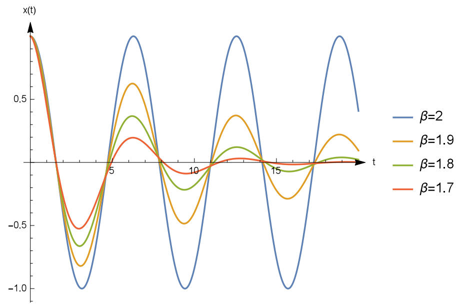

Figura 1: Gráfico do oscilador hamônico fracionário, para valores de $1 < \beta \leq 2$.

3 Conclusões e Trabalhos Futuros

Note que quando $\beta = 2$ obtemos o oscilador harmônico simples de ordem inteira. Portanto, percebe-se que ao utilizarmos a derivada fracionária na equação do oscilador harmônico simples (sem atritos ou forças externas) obtemos uma equação que, de acordo com a ordem da derivada, retratará alterações no amortecimento e frequência do oscilador, permitindo descrever este fenômeno de maneira mais realista.

Agradecimentos

O autor LKBK agradece à CAPES e o autor RFC agradece ao CNPq (Projeto Universal do CNPq - Processo:455920/2014-1) por terem financiado esta pesquisa.

Referências

[1] R. F. Camargo, Cálculo Fracionário e Aplicações, Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, (2009).

[2] G. M. Mittag-Leffler, Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$, C. R. Acad. Sci. Paris, 137, 554-558, (1903).

[3] G. S. Teodoro, Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag - Leffler, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, (2014).

