Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 3, N. 2, 2015.
Trabalho apresentado no III CMAC - SE, Vitória-ES, 2015.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equação Diferencial de Bernoulli Fracionária

Lislaine Cristina Cardoso[1]
Instituto de Biociências, IB, Botucatu, SP,
Departamento de Bioestatística, UNESP, Botucatu, SP
Rubens de Figueiredo Camargo[2]
Departemento de Matemática, UNESP, Bauru, SP

Resumo. Após uma breve revisão sobre as definições de integral fracionária de Riemann-Liouville, derivada fracionária de Caputo e funções de Mittag-Leffler, apresentamos uma generalização fracionária para a clássica equação diferencial de Bernoulli. Como uma aplicação, resolvemos a generalização fracionária de um caso particular da equação de Bernoulli, em sua forma linear e comparando o resultado obtido com a solução clássica, justificamos o porquê da solução fracionária oferecer, em alguns casos, uma descrição mais conveniente que a solução clássica.

Palavras-chave. Cálculo Fracionário, Modelagem Fracionária, Equação Diferencial de Bernoulli, Derivada Fracionária de Caputo

1 Introdução

Obter uma equação diferencial cuja solução descreva bem a realidade traz consigo uma enorme dificuldade, visto que quando consideramos um evento natural são muitas as variáveis envolvidas, sempre que desejamos fazer a modelagem matemática de um fenômeno devemos, para torná-lo viável, fazer algumas simplificações e de maneira geral, quanto mais perto estamos de descrever perfeitamente um fenômeno maior o número de variáveis envolvidas e mais complexas são as equações relacionadas.

Neste contexto, o cálculo de ordem não inteira, tradicionalmente conhecido como fracionário[3], desempenha um papel de enorme destaque. São inúmeros os casos nos quais o cálculo fracionário mostrou-se como uma importante ferramenta para generalizar a solução da respectiva equação de ordem inteira [2–4, 6, 9, 10].

A maneira canônica de se utilizar a modelagem fracionária, isto é, a modelagem feita com equações diferenciais de ordem não inteira, é substituir, na equação diferencial que se acredita ser associada a um determinado fenômeno, as derivadas de ordem inteira por

[1]lcc_mat.uems@hotmail.com
[2]rubens@fc.unesp.br
[3]De fato, o nome cálculo fracionário não é o mais preciso já que a derivada pode ser de ordem real e até mesmo complexa, entretanto por tradição este nome ainda é o mais utilizado.

derivadas de ordem fracionárias com o objetivo de que algum caso particular da solução da equação generalizada possa descrever o fenômeno de maneira mais realista.

Este método nos conduz às equações diferenciais de ordem não inteira e à necessidade de métodos para resolver tais equações. Usualmente, a solução de uma equação diferencial fracionária é dada em termos de um parâmetro (ordem da derivada) e a solução da respectiva equação de ordem inteira é recuperada em um caso particular deste parâmetro e em muitas situações a ordem da derivada que torna a solução da equação mais próxima da realidade não é inteira[4].

A equação de Bernoulli remonta ao século XVII [1], e foi batizada em honra a Jakob Bernoulli que foi um dos pioneiros a estudar as equações diferenciais ordinárias. Inicialmente a equação foi publicada por ele em 1690 para mostrar que o comportamento de uma isóclina é equivalente a resolver uma equação ordinária de primeira ordem não-linear. Posteriormente, em 1696, Bernoulli conseguiu resolvê-la fazendo uma mudança na variável dependente que a transforma em uma equação linear. Atualmente, além da aplicação no estudo de curvas isóclinas, a equação de Benoulli tem sido utilizada para estudar dinâmicas populacionais, crescimentos logísticos, a lei de resfriamento de Newton, bem como o estudo da estabilidade de fluxos de fluidos, entre outros.

O presente trabalho apresenta a solução para a versão fracionária da equação diferencial de Bernoulli e está disposto da seguinte maneira: na Seção 1 apresentamos uma maneira original de introduzir o conceito de integral fracionária; na Seção 2 apresentamos a derivada fracionária no sentido de Caputo e justificamos a adoção desta definição; na Seção 3 introduzimos as funções de Mittag-Leffler de um e de dois parâmetros; na Seção 4, propomos e resolvemos uma generalização fracionária para a equação diferencial de Bernoulli, dando ênfase ao particular caso da equação logística fracionária; finalizamos o trabalho, na Seção 5, com as conclusões e comentários sobre trabalhos futuros.

2 Integral Fracionária

Nesta seção vamos utilizar a generalização do conceito de fatorial, feito através da função gama, para introduzir a integral fracionária de Riemann-Liouville.

Definição 1.1: Operador Integral. Sejam $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável e $n \in \mathbb{N}$. Definimos as integrais de ordens um e n, denotadas, respectivamente, por I e I^n, como

$$If(t) = \int_0^t f(t_1)\,\mathrm{d}t_1 \qquad \text{e} \qquad I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\,\mathrm{d}t_n\,\mathrm{d}t_{n-1}\ldots\,\mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1.$$

Teorema 1.1: Integral de ordem n. Para $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável temos [13]

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) = \int_0^t \phi_n(t-\tau) f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

[4]No trabalho [12] é mostrado como a solução da oscilador harmônico simples, em sua versão fracionária, tem como resposta o oscilador harmônico amortecido.

na qual o símbolo $*$ denota a convolução de Laplace e $\phi_n(t)$ a Gel'fand-Shilov[5].

Definição 1.2: Integral de ordem arbitrária de Riemann-Liouville.
Seja $f(t)$ uma função integrável, utilizamos a generalização do conceito de fatorial pela função gama para definir a integral de ordem ν de $f(t)$, denotada por $I^\nu f(t)$, como

$$I^\nu f(t) = \phi_\nu(t) * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{2}$$

3 Derivada Fracionária de Caputo.

Sejam $f(t)$ uma função diferenciável, $m \in \mathbb{N}$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$ tais que $m-1 < Re(\alpha) < m$. A derivada de ordem α no sentido de Caputo é definida como sendo a integral fracionária de uma derivada de ordem inteira, de forma que a lei dos expoentes faça sentido, isto é[6],

$$D^\alpha f(t) = I^{m-\alpha}\, D^m f(t) = \phi_{m-\alpha} * D^m f(t). \tag{3}$$

3.1 Transformada de Laplace

A partir da equação (3) e do teorema da convolução de Laplace, temos que

$$\mathfrak{L}[D^\alpha f(t)] = \mathfrak{L}[\phi_{m-\alpha} * D^m f(t)] = \mathfrak{L}[\Phi_{m-\alpha}(t)]\,\mathfrak{L}[D^m f(t)] = s^{\alpha-m}\,\mathfrak{L}[D^m f(t)]. \tag{4}$$

4 Funções de Mittag-Leffler

As assim chamadas funções de Mittag-Leffler, desempenham no cálculo fracionário, um papel similiar ao que a função exponencial desempenha no cálculo usual. Dentre outras semelhanças destacamos que, assim como a solução de uma equação diferencial ordinária e com coeficientes constantes tem a sua solução dada em termos de funções exponenciais, temos que uma equação diferencial fracionária, ordinária e com coeficientes constantes tem sua solução dada em termos de funções de Mittag-Leffler. Definimos as funções de Mittag-Leffler com um e dois parâmetros, respectivamente, como

$$E_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \qquad \text{e} \qquad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}, \quad \mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0. \tag{5}$$

Para $\alpha = 1$ recuperamos a função exponencial[7], isto é, $E_1(z) = \mathrm{e}^x$ e $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$.

[5]Definida, para $\nu \notin \mathbb{Z}_-$, como $\phi_\nu(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$.

[6]Segue, como consequência da definição, que $D^\alpha t^\beta = t^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta+1)/\Gamma(\beta-\alpha+1)$, que recupera o resultado clássico quando $\alpha = n$ e $\beta = m$, com $n, m \in N$.

[7]Outra importante propriedade da função de Mittag-Leffler de um parâmetro é que para a derivada de ordem α, no sentido de Caputo, temos [12]$\dfrac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha} E_\alpha(t^\alpha) = E_\alpha(t^\alpha)$ esta última propriedade faz com a função de Mittag-Leffler seja conhecida com a "generalização fracionária"da função exponencial.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0085

4.1 Transformada de Laplace

O par de transformadas de Laplace da função de Mittag-Leffler com dois parâmetros é dada por [7, 13]:

$$\mathfrak{L}\left[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(a\,t^{\alpha})\right] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a} \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-a}\right] = t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(a\,t^{\alpha}). \tag{6}$$

na qual $|a/s^{\alpha}| < 1$. Para recuperar a transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler clássica basta tomar $\beta = 1$ nas equações anteriores [3, 4].

5 Equação Diferencial de Bernoulli

A equação de Bernoulli remonta ao século XVII, e foi batizada em honra a Jakob Bernoulli que foi um dos pioneiros a estudar as equações ordinárias. Inicialmente a equação foi publicada por ele em 1690 para mostrar que o comportamento de uma isóclina é equivalente a resolver uma equação ordinária de primeira ordem não-linear em 1696 Bernoulli conseguiu resolvê-la. É possível resolver uma equação não-linear fazendo-se uma mudança na variável dependente que a transforma em uma equação linear. A mais importante dessas equações é citada abaixo e tem a forma:

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n. \tag{7}$$

Sua aplicação é vasta, pode-se destacar como exemplos: dinâmica populacional; crescimento logístico; lei de resfriamento de Newton; estudo da estabilidade de fluxos de fluidos; [1].

Sabe-se que ao introduzir a mudança na *variável dependente* $w(x) = y^{1-n}(x)$, a equação anterior pode ser reescrita, quando multiplicada por $(1-n)y^{-n}(x)$, como

$$w'(x) = (1-n)P(x)w(x) + (1-n)Q(x), \tag{8}$$

que é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e *linear*, *i. e.*, pode ser mais facilmente resolvida, por exemplo, via fator integrante ou transformada de Laplace.

5.1 Versão Fracionária

Desejamos resolver a versão fracionária da equação (7), ou seja[8],

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}y(x) = P(x)y + Q(x)y^n, \qquad \text{com} \qquad 0 < \alpha \leq 1. \tag{9}$$

Para isto, vamos considerar a versão fracionária da equação (8), isto é,

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}w(x) = (1-n)P(x)w(x) + (1-n)Q(x), \qquad \text{com} \qquad 0 < \alpha \leq 1, \tag{10}$$

[8]Neste trabalho, todas as derivadas fracionárias consideradas foram tomadas no sentido de Caputo.

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0085

uma vez que ela é linear, no caso inteiro as soluções são equivalentes e tomando o limite quando $\alpha \to 1$ na solução da equação (10) temos a solução da equação (9), espera-se, sobretudo para valores de α próximos de um, que as soluções sejam semelhantes.

É importante ressaltar que, embora no caso inteiro a equivalência entre as soluções das equações (7) e (8) seja elementar o mesmo não pode ser dito das versões fracionárias, uma vez que a regra de Leibnitz não é trivial para o cálculo fracionário [3, 13]. De fato, para a exposição deste trabalho pretende-se apresentar exemplos numéricos para tentar estimar e discutir com os presentes em que medida a solução da equação (10) recupera a solução da equação (9).

5.2 Caso particular

Nesta seção vamos elucidar, com um exemplo, a saber, o da equação logística, como a metodologia apresentada na seção anterior pode ser utilizada para apresentar a solução de uma equação diferencial linear advinda de uma equação diferencial do tipo Bernoulli [9]

A equação logística clássica, conforme proposta por Pierre François Verhulst, pode ser considerada, sem perda de generalidade, da seguinte forma.

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = k\,y(t)[1 - y(t)], \qquad y(t) > 0. \tag{11}$$

Seguindo a metodologia apresentada na seção anterior, vamos tomar $z(t) = 1/y(t)$ de modo a converter a equação (11) em uma equação linear, ou seja,

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = k\,(1 - z), \tag{12}$$

cuja solução é dada por

$$z(t) = 1 + \frac{1}{c}\mathrm{e}^{-kt} \quad \text{com} \quad z(0) = 1 + \frac{1}{c}. \tag{13}$$

Como $y(t) = z(t)^{-1}$ temos que $1/c = 1/y(0) - 1$ e consequentemente;

$$y(t) = \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{y(0)} - 1\right]\mathrm{e}^{-kt}}. \tag{14}$$

Destacamos que $0 < y(0) < 1$ e que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.

5.2.1 Generalização fracionária

Consideremos a versão fracionária de ordem $0 < \alpha \leq 1$ da equação (12) dada por

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha z(t)}{\mathrm{d}t^\alpha} = k\,(1 - z) \tag{15}$$

[9]Uma vez que este problema foi resolvido e discutido em [13], apresentamos aqui apenas os resultados principais.

Na referência [13] foi mostrado, através da metodologia da transformada de Laplace que a solução desta equação é dada por

$$z(t) = 1 + [z(0) - 1]E_\alpha(-kt^\alpha) \tag{16}$$

Lembrando que, no caso inteiro, $y(t) = 1/z(t)$ podemos escrever

$$\frac{1}{z(t)} = \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{y(0)} - 1\right] E_\alpha(-kt^\alpha)}. \tag{17}$$

Ao aplicar o limite $\alpha \to 1$ na equação (17), recuperamos o resultado da equação (14).

5.3 Comportamento gráfico

Concluímos esta seção mostrando o comportamento gráfico do inverso da solução da equação (15), para diferentes valores de α.

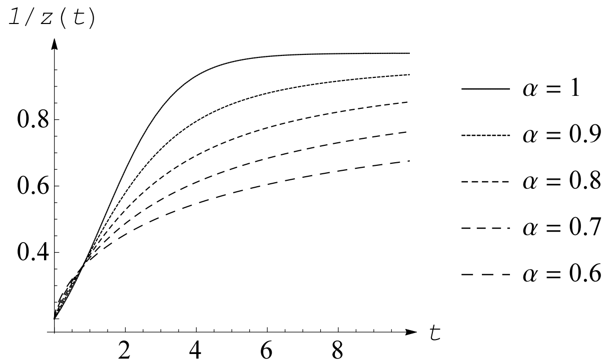

Figura 1: Gráfico da equação (17), para diferentes valores de α.

Observa-se que, a medida que a ordem da derivada diminui o tempo necessário para atingir o valor de suporte aumenta, o que torna este modelo conveniente para, por exemplo, modelar o crescimento de tumores de câncer em regiões pouco vascularizadas [13].

6 Conclusões e Trabalhos Futuros

No presente trabalho apresentamos uma metodologia para se generalizar e resolver casos particulares da equação diferencial de Bernoulli linearizada. Como caso particular, analisamos a equação logística em sua versão linear fracionária, recuperamos a solução clássica como um caso particular, deixando clara a consistência da solução fracionária. Observamos, pelo gráfico, que os diferentes valores da ordem da derivada permitem comportamentos bastante distintos da solução, sobretudo no tempo de convergência para o estado de equilíbrio, o que torna o modelo conveniente para modelar, dentre outros, o crescimento de tumores de câncer. Como trabalhos futuros pretende-se analisar, com maior profundidade, a relação entre as soluções das equações (9) e (10).

DOI: 10.5540/03.2015.003.02.0085

Agradecimentos

Os autores agradecem as correções e sugestões feitas pelos pareceristas. RFC agradece ao CNPq (Projeto Universal - Processo: 455920/2014-1) por ter financiado esta pesquisa.

Referências

[1] H. Bernhard The Bernoulli family, In: Wussing, H. Arnold, W. Biographien bedeutender Mathematiker Berlin, (1983).

[2] R. F. Camargo, R. Charnet and E. Capelas de Oliveira, On Some Fractional Green's Functions, J. Math. Phys. 50, 043514 (2009). DOI:10.1063/1.3119484.

[3] R. F. Camargo Cálculo Fracionário e Aplicações, Tese de Doutorado, Unicamp (2009).

[4] R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira e J. Vaz Jr., On the Generalized Mittag-Leffler Function and its Application in a Fractional Telegraph Equation, Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 14, 1385-0172 (2011). DOI: 10.1007/s11040-011-9100-8.

[5] R. Figueiredo Camargo, J. Vaz Jr. and E. Capelas de Oliveira, On the generalized Mittag-Leffler function and its application in fractional telegraph equation, Math. Phys. Anal. Geom., 15, 1-16, (2012). DOI: 10.1007/s11040-011-9100-8.

[6] Debnath, Recent Applications of Fractional Calculus to Science and Engineering, Int. J. Math. 2003, 3413-3442 (2003).

[7] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi and S. V. Rogosin, Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications, Theory and Applications, Springer Monography in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg (2014).

[8] F. Mainardi and R. Gorenflo, On Mittag-Leffler-Type Functions in Fractional Evolution Process, J. Comput. Appl. Math., 118, 283-299 (2000).

[9] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol.198, Academic Press, San Diego (1999).

[10] A. L. Soubhia, R. F. Camargo, E. Capelas de Oliveira, J. Vaz Theorem for Series in Three-Parameter Mittag-Leffler Function, Fractional Calculus and Applied Analysis 13 (2010).

[11] P. F. Verhulst, Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement. Correspondance mathématique et physique, 10, 113-121 (1838).

[12] G. S. Teodoro, Cálculo Fracionário e as Funções de Mittag-Leffler, dissertação de mestrado, Unicamp (2014).

[13] N. Varalta, A. V. Gomes e R. F. Camargo A Prelude to the Fractional Calculus Applied to Tumor Dynamic, TEMA, 15, N. 2 (2014). doi: 10.5540/tema.2014.015.02.0211.

