

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um Modelo Matemático para a Simulação do Transporte de Solutos em Solos Não-Saturados

Rebeca Costa Dias do Rosário¹

Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, IPRJ/UERJ, Nova Friburgo, RJ

Rigoberto G. S. Castro²

Laboratório de Ciências Matemáticas, UENF, Campos dos Goytacazes, RJ

Resumo. Uma formulação de elementos finitos semi-discretos é proposta para aproximar o sistema acoplado não linear de Equações Diferenciais Parciais, composto da Equação de Richards para o fluxo e da equação do transporte de Advecção-Dispersão-Sorção para a concentração, que modela o transporte de solutos no solo. A equação de Richards é apresentada em três formas [1]: forma h , devida a carga de pressão; forma θ , baseado na umidade e forma mista, que é a combinação das duas variáveis. Neste trabalho, a equação de Richards é resolvida na forma mista que tem vantagens em relação à forma h , pois garante as propriedades de conservação de massa. Em ambas equações a variável espacial é aproximada pelo método de elementos finitos e a integração do tempo é resolvido usando a família do Método Trapezoidal Generalizado.

Palavras-chave: *Equação de Richards, Método de Elementos Finitos, Equação de Transporte de Solutos.*

1 Introdução

O transporte de solutos no solo na zona não-saturada é modelado matematicamente por um sistema acoplado de Equações Diferenciais Parciais. Este modelo é considerado uma importante ferramenta, pois permite prever os riscos de poluição e contaminação e ainda os impactos que determinado soluto pode causar no sistema solo-água [3].

Nos trabalhos [2, 3] foi resolvida a equação de Richards na forma h , devido à carga de pressão, cuja desvantagem é a perda da conservação de massa. Em [1] foi provado que a propriedade de conservação de massa é alcançada quando as aproximações por diferenças finitas ou elementos finitos da equação de Richards são baseadas com a derivada temporal da variável θ , devido à umidade. Observou-se que enquanto $\partial\theta/\partial t = C(h)\partial h/\partial t$ são equivalentes matematicamente no contínuo, o seu análogo discreto não é equivalente devido à natureza altamente não linear da capacidade hídrica $C(h)$. Portanto, a equação de Richards na forma mista, que é a combinação das duas variáveis, é a mais indicada porque além de ter a variável θ , providencia a solução em termos de h , que é a variável de interesse, o que não é conseguido na forma θ .

¹rosario@iprj.uerj.br

²sanabria@uenf.br

2 Modelo Matemático

O objetivo deste trabalho é resolver numericamente o sistema acoplado do transporte de solutos, dada na forma pontual:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] = 0 \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (1)$$

$$v = -K(h) \frac{\partial}{\partial z} (h + z) \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (R\theta c) + \frac{\partial}{\partial z} (v\theta c) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial}{\partial z} (\theta c) \right) + \lambda \theta c = 0, \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (3)$$

onde h é a carga de pressão (potencial matricial), t é o tempo, z a coordenada vertical, v o fluxo, c a concentração volumétrica do soluto, R é o fator de retardo devido à sorção do solo, D é o coeficiente de dispersão mecânica, λ o coeficiente de decaimento de primeira ordem, θ a umidade volumétrica (conteúdo de água) e K a condutividade hidráulica do solo. A equação (1) é a equação de Richards na forma mista, a equação (2) é a velocidade ou fluxo da carga de água e (3) é a equação de advecção-dispersão-sorção.

2.1 Solução Numérica

Na literatura o sistema acoplado é amplamente resolvido utilizando o Método de Diferenças Finitas (MDF) em sua formulação semi-discreta. Neste trabalho, o sistema acoplado é resolvido usando o Método de Elementos Finitos (MEF) na forma semi-discreta, isto é, a variável temporal é aproximada pelo Método Trapezoidal Generalizado e a variável espacial é aproximada por elementos finitos. O sistema não linear resultante da discretização da equação de Richards é resolvido usando o método de Newton-Raphson. O transporte do íon potássio numa coluna de solo não saturado é apresentado.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES e CNPq (Processo: 150240/2013).

Referências

- [1] M. A. Celia, E. T. Boulotas and R. L. Zarba, A General Mass-Conservative Numerical Solution for the Unsaturated Flow Equation, *Water Resour. Res.*, vol. 26, 1483–1496, (1990).
- [2] J. H. Miranda, S. N. Duarte, P. L. Libardi, M. V. Folegatti, Simulação do Deslocamento de Potássio em Colunas Verticais de Solo não Saturado, *Eng. Agríc.*, vol.25, n.3, 677–685, (2005).
- [3] M. L. P. Pizarro, Simulação de Fluxo de Água e Transporte de Solutos na Zona Não-Saturada do Solo pelo Método de Elementos Finitos Adaptativo, Tese de doutorado em Ciências de Eng. Ambiental, Escola de Eng. de São Carlos da USP, (2009).