

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics****Otimização de problemas integrados na indústria papelreira****Sônia Cristina Poltroniere Silva**<sup>1</sup>

Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, SP,

Departamento de Matemática

**Silvio Alexandre de Araujo**<sup>2</sup>

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP, São José do Rio Preto, SP,

Departamento de Matemática Aplicada

**Kelly Cristina Poldi**<sup>3</sup>

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, SP.

**Resumo.** Dois importantes problemas de otimização matemática ocorrem no planejamento e programação da produção em indústrias papelreiras: o problema de dimensionamento de lotes e o problema de corte de estoque multiperíodo. O problema de dimensionamento de lotes deve determinar a quantidade de bobinas jumbos de diferentes tipos de papel a serem produzidos em cada máquina, ao longo de um horizonte de planejamento finito. Estes jumbos são então cortados para atender a demanda de itens para cada período. Neste trabalho, tratamos da integração desses dois problemas, procurando minimizar custos com produção e estoque dos jumbos, como também a perda de papel durante o processo de corte. Diferentes modelagens para o problema integrado são consideradas, e os modelos foram resolvidos heurísticamente usando um pacote de otimização. Procurando obter limitantes inferiores para o problema, foram resolvidas versões relaxadas dos modelos. Resultados computacionais são discutidos.

**Palavras-chave.** Problema de corte de estoque, problema de dimensionamento de lotes, problemas integrados, métodos computacionais.

**1 Introdução**

O problema de corte de estoque, que surge em indústrias de manufatura, consiste na otimização do processo de corte de unidades maiores (objetos) que estejam disponíveis, para a produção de um conjunto de unidades menores (itens), com o objetivo de atender a demanda desses itens e satisfazer algum critério de otimização, por exemplo, minimizar a perda de material gerada pelo corte. Tais problemas vêm sendo investigados nas últimas

---

<sup>1</sup> soniacps@fc.unesp.br<sup>2</sup> saraujo@ibilce.unesp.br<sup>3</sup> kelly.poldi@gmail.com

décadas, desde os trabalhos pioneiros de Gilmore e Gomory (1961, 1963, 1965), que propuseram a técnica de geração de colunas, viabilizando a resolução de problemas reais.

Atualmente, a integração do problema de corte de estoque com outros problemas que ocorrem no planejamento e programação da produção em indústrias tem gerado pesquisas em todo o mundo. Um exemplo é a integração com o problema de dimensionamento de lotes (Trigeiro et al. 1989), que consiste em determinar a quantidade de produtos a serem produzidos em cada período ao longo de um horizonte de tempo finito, de modo a atender certa demanda e otimizar uma função objetivo, como por exemplo, minimizar custos, estoques e atrasos. Em geral, o problema de dimensionamento de lotes (PDL) e o problema de corte de estoque (PCE) são tratados separadamente de forma sequencial, ou seja, primeiro resolve-se o PDL e posteriormente o PCE. No entanto, esta abordagem pode elevar os custos globais. A seguir, são apresentados alguns trabalhos que consideram problemas integrados em contextos industriais.

Farley (1988) foi o primeiro autor a publicar um estudo sobre o PCE integrado ao problema de planejamento e programação da produção, com aplicações na indústria de roupa. Na indústria de papel, podemos citar Respício e Captivo (2002) e Correia et al. (2004). Também com aplicações na indústria de papel, Poltroniere et al. (2008) propuseram um modelo matemático para tratar o PDL e o PCE de forma integrada, num horizonte de planejamento dividido em períodos. Foram propostos dois métodos heurísticos para a solução, baseados na relaxação Lagrangiana das restrições de integração, que se mostraram apropriados para tratar o problema integrado. Considerando a indústria moveleira, Gramani e França (2006) também estudaram a integração do PDL e do PCE. Foram propostos um modelo matemático e um método de solução baseado no problema de caminho mínimo. Gramani et al. (2009, 2010) realizaram extensões do modelo proposto em 2006 e novas abordagens de solução. Também podemos citar os trabalhos de Ghidini (2008), Santos et al. (2011) e Vanzela et al. (2012). Recentemente, temos os trabalhos de Silva et al. (2014) e Kallrath et al. (2014).

Em Poltroniere *et al.* (2008), são obtidas soluções factíveis para o problema integrado. No entanto, não se pode afirmar a qualidade destas soluções, pois não se conhecem as soluções ótimas e nem tampouco limitante inferiores (duais) para o problema. O objetivo deste trabalho consiste na resolução de diferentes modelos matemáticos para o problema proposto em Poltroniere *et al.* (2008). Além do modelo proposto pelos autores, que considera a abordagem de Gilmore e Gomory (1963) para o problema de corte de estoque, neste trabalho, consideramos também a abordagem de Kantorovich (1960) e de Valério de Carvalho (1999, 2002), que é baseada num modelo de fluxo em redes. Os modelos são implementados usando um pacote de otimização, resolvidos de forma heurística e os resultados são comparados com os obtidos em Poltroniere *et al.* (2008). Além disso, algumas relaxações são resolvidas com o intuito de obter limitantes inferiores para o problema integrado, o que permitirá testar a qualidade das soluções heurísticas.

## 2 Modelos matemáticos

Poltroniere *et al.* (2008) propõem um modelo matemático inteiro misto para tratar o PDL e o PCE de forma integrada, num horizonte de planejamento dividido em períodos. O PCE foi modelado usando a abordagem de Gilmore e Gomory (1963), supondo diferentes bobinas em estoque, em quantidades limitadas, como está apresentado na seção 2.1.

## 2.1 Modelo Integrado usando a abordagem de Gilmore e Gomory (LCGG)

### Índices:

$t = 1, \dots, T$  : número de períodos no horizonte de planejamento;

$k = 1, \dots, K$  : número de gramaturas;

$m = 1, \dots, M$  : número de máquinas (máquina  $m$  produz bobinas-mestre de largura  $L_m$ );

$j = 1, \dots, N_m$  : número de padrões de corte para as bobinas-mestre do tipo  $m$ ;

$i = 1, \dots, Nf$  : número de diferentes tipos de itens demandados;

$\{1, \dots, Nf\} = S(1) \cup S(2) \cup \dots \cup S(K)$ , em que  $S(k) = \{i \text{ tal que o item } i \text{ tem gramatura } k\}$ .

### Parâmetros:

$c_{kmt}$  : custo de produção da bobina-mestre de gramatura  $k$  na máquina  $m$  no período  $t$ ;

$h_{kt}$  : custo/ton de estocar bobinas-mestre de gramatura  $k$  no período  $t$ ;

$s_{kmt}$  : custo de preparação da máquina  $m$  para produzir bobina-mestre de gram.  $k$ , período  $t$ ;

$cp_{kt}$  : custo/cm de perda de papel de gramatura  $k$  durante o processo de corte no período  $t$ ;

$\sigma_{it}$  : custo/ton de estocar itens finais do tipo  $i$  no período  $t$ .

$C_{mt}$  : capacidade (ton) da máquina  $m$  no período  $t$ ;

$\mathbf{d}_{kt}$  : vetor da demanda de itens finais de gramatura  $k$  no período  $t$ .

$\rho_k$  : peso específico da bobina-mestre de gramatura  $k$ ;

$\boldsymbol{\eta}_k$  : vetor de pesos dos itens finais de gram.  $k$  ;

$D_{kt}$  : demanda (ton) de papel da gramatura  $k$  no período  $t$  ( $D_{kt} = \boldsymbol{\eta}_k \mathbf{d}_{kt}$ );

$b_{km}$  : peso da bobina-mestre de gramatura  $k$  produzida na máquina  $m$  ( $b_{km} = L_m \rho_k$ );

$f_{km}$  : peso do papel desperdiçado na preparação da máquina  $m$  para a bobina de gramatura  $k$ ;

$\mathbf{a}_{jm}$  : vetor associado ao padrão de corte  $j$  para a bobina-mestre de largura  $L_m$ ;

$p_{jm}$  : perda de papel (cm) no padrão de corte  $j$  usado na bobina-mestre de largura  $L_m$ ;

$Q$  : número grande.

### Variáveis de decisão:

$x_{kmt}$  : número de bobinas-mestre de gramatura  $k$ , produzidas na máquina  $m$  no período  $t$ ;

$w_{kmt}$  : estoque de bobinas-mestre de gramatura  $k$ , máquina  $m$  estocadas no fim do período  $t$ ;

$z_{kmt}$  : indicam a produção ou não da bobina-mestre de gram.  $k$  na máquina  $m$  no período  $t$ .

$y_{kmt}^j$  : número de bobinas-mestre de gramatura  $k$  produzidas na máquina  $m$  no período  $t$ , cortadas usando o padrão de corte  $j$ ;

$\mathbf{e}_{kt}$  : vetor de itens finais de gramatura  $k$  estocados no final do período  $t$ .

No modelo a seguir, o parâmetro  $D_{kt}$  não é um dado do problema, pois depende da perda que ocorre durante o processo de corte. Por definição, ele deve ser  $D_{kt} = \sum_{i \in S(k)} \eta_{ik} d_{ikt} + \text{perda}$ . Destacam-se as restrições (6), que limitam o número de

bobinas-mestre cortadas àquelas que foram produzidas anteriormente, pois são as restrições de integração que envolvem decisões relativas à produção e ao corte de jumbos.

Modelo matemático **LCGG**-Lote Corte Gilmore Gomory:

$$\text{Minimizar } \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K (c_{kmt} x_{kmt} + h_{kt} b_{km} w_{kmt} + s_{kmt} z_{kmt}) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K cp_{kt} F(k,t) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \sum_{i \in S(k)} \sigma_{it} \eta_{ik} e_{ikt} \quad (1)$$

$$\text{s. a. } \sum_{m=1}^M (b_{km} x_{kmt} + b_{km} w_{k,m,t-1} - b_{km} w_{kmt}) = D_{kt}, \quad k=1, \dots, K; t=1, \dots, T \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^K (b_{km} x_{kmt} + f_{km} z_{kmt}) \leq C_{mt}, \quad m=1, \dots, T; t=1, \dots, T \quad (3)$$

$$x_{kmt} \leq Q \cdot z_{kmt}, \quad k=1, \dots, K; m=1, \dots, T; t=1, \dots, T \quad (4)$$

$$\sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^{N_m} a_{jm} y_{kmt}^j + \mathbf{e}_{k,t-1} - \mathbf{e}_{kt} = \mathbf{d}_{kt}, \quad k=1, \dots, K; t=1, \dots, T \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{N_m} y_{kmt}^j = x_{kmt} + w_{k,m,t-1} - w_{kmt}, \quad k=1, \dots, K; m=1, \dots, T; t=1, \dots, T \quad (6)$$

$$w_{km0} = 0, \mathbf{e}_{k0} = 0, \quad k=1, \dots, K; m=1, \dots, M \quad (7)$$

$$x_{kmt} \geq 0, w_{kmt} \geq 0 \text{ e inteiros}, \quad k=1, \dots, K; m=1, \dots, M; t=1, \dots, T \quad (8)$$

$$z_{kmt} \in \{0, 1\}, \quad k=1, \dots, K; m=1, \dots, M; t=1, \dots, T \quad (9)$$

$$y_{kmt}^j \geq 0 \text{ inteiros}, \mathbf{e}_{kt} \geq 0, \quad j=1, \dots, N_m; \quad k=1, \dots, K; m=1, \dots, M; t=1, \dots, T \quad (10)$$

## 2.2 Outras abordagens para o Modelo Integrado

Kantorovich (1960) introduziu uma formulação matemática para o problema de corte de estoque, supondo apenas um tipo de objeto em estoque de largura  $L$ , em quantidade limitada, com o objetivo de minimizar o número de objetos (bobinas no caso específico da indústria de papel) cortados para atender a uma demanda.

Valério de Carvalho (1999) propôs uma formulação alternativa para o PCE, considerando objetos idênticos em estoque. Trata-se de um problema de fluxo mínimo com restrições adicionais para a satisfação da demanda. Segundo o autor, o modelo linear, obtido pela relaxação das variáveis de integralidade, é equivalente ao modelo de Gilmore e Gomory (1961) e, portanto, os limitantes inferiores em ambos os casos são iguais. A extensão desse modelo para vários tipos de objetos em estoque é proposta em Valério (2002).

Neste trabalho, modelamos o problema integrado proposto em Poltroniere et al. (2008) usando as abordagens de Kantorovich (modelo **LCKT**) e de Valério de Carvalho (modelo **LCVC**). Considerando o modelo (1)-(10), na seção 2.1, a função objetivo e os conjuntos de restrições (5), (6) e (10) foram alterados de maneira adequada para cada modelagem proposta pelos autores.

### 3 Heurísticas propostas em Poltroniere et al. (2008)

Para resolver o problema integrado (1)-(10), Poltroniere et al. (2008) propuseram dois métodos, denominados Heurísticas Lote/Corte e Corte/Lote, baseadas na relaxação lagrangiana das restrições de integração (6) que são adicionadas à função objetivo (1), ponderadas pelas variáveis duais  $\gamma_{kmt}$ . Assim, o problema (1)-(10) é decomposto em dois subproblemas: PDL e PCE, que são abordados separadamente e iterativamente.

Para resolver o PDL definido pelas restrições (2)-(4), (8) e (9), foi realizada uma adaptação do método proposto por Toledo (1998). A solução obtida supre o PCE com os jumbos a serem cortados. O PCE multiperíodo (restrições (5) acopladas por causa do estoque de itens finais  $e_{ikt}$ ) é composto por  $K$  subproblemas independentes, um para cada gramatura. Esses  $K$  subproblemas foram resolvidos num horizonte dividido em períodos, usando método simplex com geração de colunas proposto por Gilmore e Gomory (1961, 1963) e considerando a condição de integralidade relaxada. Para possibilitar a antecipação de itens durante o processo de corte, utilizamos uma abordagem heurística, proposta em Poltroniere (2006), permitindo novas combinações de itens.

### 4 Resultados computacionais

Foram utilizados os exemplares gerados em Poltroniere *et al.* (2008). São 27 classes, cada uma delas contendo 10 exemplares, classificados de acordo com o número de itens demandados ( $Nf = 5, 10, 20$ ), o número de gramaturas ( $K = 2, 4, 6$ ) e o número de períodos  $T = 8, 10, 12$ . As bobinas mestre de larguras  $L_1 = 540cm$  e  $L_2 = 460cm$  e com peso específico  $\rho_k = 2kg/cm$ . Os parâmetros do modelo foram gerados simulando situações encontradas na indústria de papel.

#### 4.1 Soluções heurísticas

Os resultados heurísticos obtidos com a resolução dos três modelos, que usam as abordagens de Gilmore e Gomory (LCGG), Kantorovich (LCKT) e Valério de Carvalho (LCVC), utilizando o pacote computacional Cplex 12.6, foram comparados com os resultados apresentados por uma das heurísticas desenvolvidas em Poltroniere et al. (2008), chamada heurística Lote/Corte, como descrita resumidamente na seção 3.

Para a resolução dos modelos LCKT e LCVC, as variáveis do modelo original foram consideradas como inteiras, e o tempo computacional foi limitado em 600 segundos na tentativa de obter uma solução exata. No modelo LCGG, primeiramente, é resolvida a relaxação linear de forma ótima, considerando inteiras as variáveis relativas ao problema da mochila. Posteriormente, considerando somente as colunas da solução ótima da relaxação linear, é dado um limite de 600 segundos para que o pacote encontre uma solução inteira.

Destacam-se os resultados obtidos ao se resolver o modelo LCGG, pois, num tempo computacional relativamente baixo, encontrou-se soluções muitas vezes melhores do que as obtidas pela heurística de Poltroniere et al. (2008). O modelo LCKT não consegue provar a otimalidade para nenhum exemplo, mas encontra soluções factíveis para (somente) 6 exemplares, dentro do tempo disponível. Já o modelo LCVC não conseguiu encontrar soluções factíveis em 600 segundos.

## 4.2 Relaxações

Versões relaxadas dos modelos apresentados na Seção 2 também foram resolvidas com o objetivo de prover limitantes inferiores para os exemplos e conseqüentemente ter um parâmetro de teste para a qualidade das heurísticas.

Relaxação 1: as variáveis do problema foram relaxadas, inclusive as variáveis de preparação de máquina (*setup*), que passaram a ser consideradas contínuas entre 0 e 1, e as relativas aos padrões de corte. No entanto, as relativas ao problema da mochila foram mantidas como inteiras. Destacam-se aqui a qualidade dos limitantes inferiores obtidos pelo modelo LCGG, que foram os melhores obtidos pelas relaxações.

Relaxação 2: com o intuito de obter limitantes inferiores ainda mais apertados, utilizou-se os modelos LCKT e LCVC para resolver o problema com as variáveis de preparação binárias e as restantes contínuas (inclusive as variáveis relativas ao problema da mochila). Observa-se que neste caso não faz sentido a aplicação do modelo LCGG, pois, seria uma solução heurística já que nem todas as colunas estariam disponíveis no processo de arredondamento. Além disso, só é possível garantir que se tem um limitante inferior, quando os modelos LCKT e LCVC resolvem o problema de forma ótima, o que ocorreu para todas as instâncias, num tempo computacional bastante baixo. Neste caso, destacam-se como melhores, os limitantes obtidos pelo modelo LCVC.

## 5 Conclusões e perspectivas futuras

Este trabalho considerou o modelo para o problema integrado de corte de estoque e dimensionamento de lotes proposto por Poltroniere et al. (2008). Três modelagens matemáticas foram implementadas e resolvidas heurísticamente usando o pacote Ampl/Cplex 12.6. Versões relaxadas dos modelos foram, também, resolvidas para obter limitantes inferiores para a solução do problema integrado. As soluções heurísticas obtidas usando o pacote computacional Cplex 12.6 mostraram-se satisfatórias, sendo que, para alguns exemplos, os resultados obtidos foram melhores que os obtidos por Poltroniere et al. (2008). Os resultados mostraram que as relaxações consideradas forneceram bons limitantes inferiores para o problema integrado, com destaque para os obtidos pelo modelo LCGG. Vale ainda destacar que esses limitantes não estão muito distantes das soluções heurísticas obtidas em Poltroniere et al. (2008), o que permitiu observar a qualidade das heurísticas.

Como propostas futuras, pretende-se desenvolver métodos para auxiliar na resolução dos modelos matemáticos de forma exata e/ou heurística via pacote de otimização. Alguns testes iniciais realizados em Poldi e Araujo (2014) mostram que o problema de corte de estoque multiperíodo, que aparece no contexto do problema integrado, pode ser bem resolvido quando o modelo de fluxo em arcos é utilizado. Assim, podemos utilizar estes modelos de forma conjunta com as heurísticas propostas em Poltroniere et al. (2008).

## Referências

- [1] M. H. Correia, J. F. Oliveira and J. S. Ferreira, Reel and sheet cutting at a paper mill. *Computers & Operations Research* 31, 1223-1243, (2004).
- [2] A. A. Farley, *Mathematical Programming Models for Cutting-Stock Problems in the Clothing Industry*. *Operational Research Society* 1, 41-53, (1988).
- [3] P. C. Gilmore and R. E. Gomory, A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research* 9, 848-859, (1961).

- [4] P. C. Gilmore and R. E. Gomory, A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. *Operations Research* 11, 863-888, (1963).
- [5] P. C. Gilmore and R. E. Gomory, Multi-stage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research* 13, 94-120, (1965).
- [6] M.C.N. Gramani and P.M. França, The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research* 174, 509-521, (2006).
- [7] M.C.N. Gramani, P.M. França and M. N. Arenales, A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. *International Journal of Production Economics* 119, 219-227, (2009).
- [8] M.C.N. Gramani, P.M. França and M. N. Arenales, A linear optimization approach to the combined production planning model. *Journal of the Franklin Institute* 348(7), 1523-1536, (2010).
- [9] C. T. L. S. Ghidini, Otimização de processos acoplados: programação da produção e corte de estoque. Tese de doutorado. ICMC-USP, São Carlos-SP, (2008).
- [10] J. Kallrath, S. Rebennack, J. Kallrath and R. Kusche, Solving Real-World Cutting Stock-Problems in the Paper Industry: Mathematical Approaches, Experience and Challenges, *European Journal of Operational Research*, (2014). Doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2014.03.027>
- [11] L. Kantorovich, Mathematical methods of organising and planning production (traduzido a partir de um artigo russo, datado de 1939), *Management Science* 6, 366-422, (1960).
- [12] K. C. Poldi and S. A. Araújo, Formulações para o problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. *Anais do CNMAC*, (2014).
- [13] S. C. Poltroniere, K. C. Poldi, F. M. B. Toledo and M.N. Arenales, Coupling Cutting Stock and Lot Sizing Problems in the Paper Industry. *Annals of Operations Research* 157, 91-104, (2008).
- [14] A. Respício and M. E. Captivo, Integrating the cutting stock problem in capacity planning. PhD thesis. Department of Informatics and Centre of Operational Research. University of Lisbon/Portugal, (2002).
- [15] S. G. Santos, S. A. Araujo and S. Rangel, Integrated Cutting Machine Programming and Lot Sizing in Furniture Industry. *Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento* 3, 249-266, (2011).
- [16] E. Silva, F. Alvelos and J. M. Valério de Carvalho, Integrating two-dimensional cutting stock and lot-sizing problems. *Journal of Operational Research Society* 65, 108-123, (2014).
- [17] F. M. B. Toledo, Dimensionamento de lotes em máquinas paralelas. Tese de Doutorado. DENSIS-UNICAMP, (1998).
- [18] W. W. Trigeiro, L. G. Thomas and J. O. McClain, Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science* 35(3), 353-366, (1989).
- [19] J. M. Valério de Carvalho, Exact solution of bin packing problem using column generation and branch-and-bound. *Annals of Operations Research* 86, 629-659, (1999).
- [20] J. M. Valério de Carvalho, LP models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research* 141, 253-273, (2002).
- [21] M. Vanzela, S. Rangel, S. A. Araujo and M. A. Carravilla, Um estudo de problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque para uma fábrica de móveis de pequeno porte. *Anais do XLIV SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, Rio de Janeiro – RJ, (2012).