Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Classe de Equações Diferenciais Fracionárias via Operador de Caputo-Fabrizio

Paulo Sérgio Costa Lino[1]
Departamento de Matemática, Licenciatura em Matemática, UNEMAT, Barra do Bugres, MT
Junior Cesar Alves Soares[2]
Departamento de Matemática, Licenciatura em Matemática, UNEMAT, Barra do Bugres, MT

Resumo O Cálculo Fracionário têm sido empregado em diversos problemas da Matemática Aplicada e da Física, em especial, nos problemas de valores iniciais. Neste artigo apresentamos a solução de uma classe de equação diferencial fracionária linear de primeira ordem não-homogênea com o operador de Caputo-Fabrizio.
Palavras-chave. Equações diferenciais fracionárias lineares, operador de Caputo-Fabrizio, convolução, fator integrante.

1 Introdução

O estudo de modelos que usam derivadas fracionárias vem sendo largamente utilizados, porque muitos fenômenos biológicos e físicos são bem descritos quando a derivada possui ordem arbitrária conforme [6]. Podemos destacar [2] que trata de um novo operador fracionário sem núcleo singular, além disso, aplicando convenientemente, derivadas e equações diferenciais fracionárias ordinárias, [1] apresenta um estudo de três tipos diferentes de circuitos elétricos usando cálculo fracionário e várias definições de derivadas fracionárias. Ademais, problemas de viscoelasticidade [3], difusão anômala [9], entre outros, tem sido abordados através desta nova ferramenta.

Neste trabalho utilizaremos a definição do operador apresentado no artigo [2] o qual tem um núcleo que não possui singularidade. No artigo [5] foram apresentadas algumas propriedades deste novo operador diferencial e apesar deste não ser uma derivada fracionária conforme apresentado em [7], por não satisfazer a lei dos expoentes, a mesma é utilizada para descrever fenômenos físicos como por exemplo descrever sistemas massa-mola, circuitos elétricos RLC e crescimento populacional [4].

2 Conceitos Preliminares

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos que serão usados no desenvolvimento do artigo.

[1]linnux2001@gmail.com
[2]juniorcasoares@unemat.br

Definição 2.1. *Para $0 < \alpha < 1$, o operador de Caputo-Fabrizio de ordem α é definida por:*

$$^{CF}D^{\alpha}f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha}\int_a^t \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right]f'(\tau)d\tau \tag{1}$$

onde $t \geq 0$ e $M(\alpha)$ é uma função de normalização em que $M(0) = M(1) = 1$ e f pertencente ao espaço de Sobolev $H^1(a,b)$ com $b > a$.

Neste artigo, por simplicidade adotaremos $M(\alpha) \equiv 1$ e $a = 0$.

Apesar do operador de Caputo-Fabrizio não ser caracterizado como uma derivada fracionária, muitos pesquisadores estão modelando problemas relacionados a viscoelasticidade [3], circuitos elétricos RLC [1], difusão anômala [9], entre outros, os quais são bem descritos via este operador sem um núcleo singular.

Usando o fato que

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{1}{\sigma}\exp[-(t-\tau)/\sigma] = \delta(t-\tau),$$

então

$$\lim_{\alpha\to 1} {}^{CF}D^{\alpha}f(t) = f'(t) \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha\to 0} {}^{CF}D^{\alpha}f(t) = f(t) - f(a),$$

consequentemente, o operador de Caputo-Fabrizio satisfaz a condição de compatibilidade que foi estudada em [5] e recentemente, no trabalho desenvolvido em [8] foi realizada, através das transformadas de Laplace, uma análise crítica deste operador demonstrando que ele não se encaixa nos conceitos usuais de derivada fracionária.

3 Resultado Principal

Uma das formas de obter a solução dos problemas de valores iniciais envolvendo operadores fracionários é por meio das transformadas de Laplace. Neste trabalho, desenvolvemos uma técnica envolvendo fator integrante, usual em equações diferenciais ordinárias lineares de ordem inteira, para solucionar uma classe de problemas de valores iniciais envolvendo o operador de Caputo-Fabrizio.

Proposição 3.1. *Sejam as funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas de classe C^1. Se $0 < \alpha < 1$ e $\lambda(t) \neq -1/(1-\alpha)$, então a solução do PVI fracionário*

$$\begin{cases} ^{CF}D^{\alpha}y + \lambda(t)y = g(t), & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left[y_0 + \int_0^t \frac{\mu(\tau)[\alpha g(\tau) + (1-\alpha)g'(\tau)]}{1+(1-\alpha)\lambda(\tau)}d\tau\right] \tag{3}$$

sendo

$$\mu(t) = \exp\left[\int \frac{\alpha\lambda(t) + (1-\alpha)\lambda'(t)}{1+(1-\alpha)\lambda(t)}dt\right]. \tag{4}$$

Demonstração: Desenvolvendo a expressão (1), podemos reescrever o operador de Caputo-Fabrizio na forma:

$$ {}^{CF}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}\right) f'(\tau) d\tau. \tag{5} $$

Substituindo a expressão (5) em (2), temos:

$$ \frac{1}{1-\alpha} \exp\left(-\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \int_0^t \exp\left(\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}\right) y'(\tau) d\tau + \lambda(t) y(t) = g(t) $$

ou seja,

$$ \int_0^t \exp\left(\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}\right) y'(\tau) d\tau + (1-\alpha) \exp\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \lambda(t) y(t) = (1-\alpha) \exp\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) g(t) \tag{6} $$

Derivando a expressão (6) em relação a t, segue que

$$ \begin{aligned} &\exp\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) y'(t) + \alpha \exp\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \lambda(t) y(t) + (1-\alpha) \exp\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \lambda'(t) y(t) \\ &+ (1-\alpha) \exp\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) \lambda(t) y'(t) = \alpha \exp\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) g(t) + (1-\alpha) \exp\left(\frac{\alpha t}{1-\alpha}\right) g'(t) \end{aligned} $$

Simplificando e reorganizando os termos, obtemos:

$$ [1 + (1-\alpha)\lambda(t)] y'(t) + [\alpha \lambda(t) + (1-\alpha)\lambda'(t)] y(t) = \alpha g(t) + (1-\alpha) g'(t) $$

Do fato que $\lambda(t) \neq -1/(1-\alpha)$, o coeficiente de $y'(t)$ desta equação diferencial é diferente de zero para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$ y'(t) + \frac{\alpha \lambda(t) + (1-\alpha)\lambda'(t)}{1 + (1-\alpha)\lambda(t)} y(t) = \frac{\alpha g(t) + (1-\alpha) g'(t)}{1 + (1-\alpha)\lambda(t)} \tag{7} $$

A equação diferencial dada em (7) é linear de primeira ordem, cujo fator integrante é dado por:

$$ \mu(t) = \exp\left[\int \frac{\alpha \lambda(t) + (1-\alpha)\lambda'(t)}{1 + (1-\alpha)\lambda(t)} dt\right] \tag{8} $$

Assim, multiplicando pelo fator integrante (8) e integrando, segue que

$$ \mu(t) y(t) = \int_0^t \left\{ \mu(\tau) \left[\frac{\alpha g(\tau) + (1-\alpha) g'(\tau)}{1 + (1-\alpha)\lambda(\tau)} \right] \right\} d\tau + C. $$

Usando o fato que $y(0) = y_0$, obtemos $y(t)$ dada em (3).

$\square$

3.1 Casos Particulares

Nesta seção apresentaremos alguns problemas de valores iniciais que são casos particulares da proposição 3.1. Observamos que se $g(t) \equiv 0$, então a solução do PVI (2) é dada por $y(t) = y_0/\mu(t)$.

Um outro caso particular interessante ocorre quando a função λ é constante. Antes de abordá-lo, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1. *O produto de convolução ou convolutivo, denotado por $*$, entre duas funções $f(t)$ e $g(t)$ com $t \in \mathbb{R}$ é definido por:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \tag{9}$$

desde que a integral exista.

Proposição 3.2. *Considere $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. A solução do PVI fracionário*

$$\begin{cases} {}^{CF}D^{\alpha}y + \lambda y = g(t), \quad t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{10}$$

é dada por

$$y(t) = y_0 \exp(-\beta t) + \frac{1}{1+(1-\alpha)\lambda} \exp(-\beta t) * [\alpha g(t) + (1-\alpha)g'(t)] \tag{11}$$

sendo $*$ o produto convolutivo e

$$\beta = \frac{\alpha\lambda}{1+(1-\alpha)\lambda}. \tag{12}$$

Demonstração: Da expressão (4), temos:

$$\mu(t) = \exp\left[\int \frac{\alpha\lambda}{1+(1-\alpha)\lambda} dt\right] = \exp(\beta t)$$

Assim, segue da expressão (3) que

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp(-\beta t)\left[y_0 + \int_0^t \frac{\exp(\beta\tau)[\alpha g(\tau) + (1-\alpha)g'(\tau)]}{1+(1-\alpha)\lambda} d\tau\right] \\ &= y_0 \exp(-\beta t) + \frac{\alpha}{1+(1-\alpha)\lambda} \int_0^t \exp[-\beta(t-\tau)]g(\tau)d\tau \\ &+ \frac{1-\alpha}{1+(1-\alpha)\lambda} \int_0^t \exp[-\beta(t-\tau)]g'(\tau)d\tau \\ &= y_0 \exp(-\beta t) + \frac{1}{1+(1-\alpha)\lambda} \exp(-\beta t) * [\alpha g(t) + (1-\alpha)g'(t)]. \end{aligned}$$

□

Observação 3.1: No trabalho de Losada et. al. em [5], os autores demonstram que o PVI:

$$\begin{cases} {}^{CF}D^{\alpha}f(t) = \lambda f(t) + u(t), & t \geq 0 \\ f(0) = f_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{13}$$

possui uma única solução sem exibí-la, mas pela proposição 3.2, a solução do PVI (13) é dada por:

$$f(t) = f_0 \exp(-\beta t) + \frac{1}{1-(1-\alpha)\lambda} \exp(-\beta t) * [\alpha u(t) + (1-\alpha)u'(t)]$$

sendo $\beta = -\alpha\lambda/[1-(1-\alpha)\lambda]$.

4 Exemplos e Aplicações

Vejamos nesta seção um exemplo e aplicação que podem ser resolvidos através do operador diferencial fracionário de Caputo-Fabrizio.

Exemplo 4.1: Para $0 < \alpha < 1$, mostre que a solução do PVI

$$\begin{cases} {}^{CF}D^{\alpha}y + ty = t, & t > 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{14}$$

é dada por

$$y(t) = \frac{y_0 + \alpha I_1(t) + (1-\alpha)I_2(t)}{\mu(t)} \text{ sendo } \mu(t) = e^{\alpha t/(1-\alpha)}[1+(1-\alpha)t]^{-\alpha/(1-\alpha)^2},$$

$$I_1(t) = \int_0^t \tau e^{\alpha\tau/(1-\alpha)}(\alpha\tau + 1 - \alpha)^{-\alpha/(1-\alpha)^2} d\tau$$

e

$$I_2(t) = \int_0^t e^{\alpha\tau/(1-\alpha)}(\alpha\tau + 1 - \alpha)^{-\alpha/(1-\alpha)^2} d\tau.$$

Resolução: De fato, da expressão (4), temos

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp\left[\int \frac{\alpha t + 1 - \alpha}{1+(1-\alpha)t} dt\right] = \exp\left[\alpha \int \frac{t dt}{1+(1-\alpha)t} + (1-\alpha)\int \frac{dt}{1+(1-\alpha)t}\right] \\ &= \exp\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\int \frac{(1-\alpha)t + 1 - 1}{1+(1-\alpha)t} dt + \int \frac{(1-\alpha)dt}{1+(1-\alpha)t}\right] \\ &= \exp\left\{\frac{\alpha t}{1-\alpha} + \left[1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\right] \ln[1+(1-\alpha)t]\right\} + C \end{aligned}$$

Tomando $C = 0$, temos:

$$\mu(t) = e^{\alpha t/(1-\alpha)}[1+(1-\alpha)t]^{1-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}}$$

Assim, segue da expressão (3) que

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{y_0}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int_0^t e^{\alpha\tau/(1-\alpha)} \frac{[1+(1-\alpha)\tau]^{1-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}} \alpha\tau}{1+(1-\alpha)\tau} d\tau \\
&+ \frac{1}{\mu(t)} \int_0^t e^{\alpha\tau/(1-\alpha)} \frac{[1+(1-\alpha)\tau]^{1-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}} (1-\alpha)}{1+(1-\alpha)\tau} d\tau \\
&= \frac{y_0}{\mu(t)} + \frac{\alpha}{\mu(t)} \int_0^t \tau e^{\alpha\tau/(1-\alpha)} [1+(1-\alpha)\tau]^{-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}} d\tau \\
&+ \frac{1-\alpha}{\mu(t)} \int_0^t e^{\alpha\tau/(1-\alpha)} [1+(1-\alpha)\tau]^{-\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}} d\tau = \frac{y_0 + \alpha I_1(t) + (1-\alpha) I_2(t)}{\mu(t)} \cdot
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.2: Considere $0 < \alpha < 1$ e $g, k, m > 0$. A versão fracionária de um corpo em queda livre em um meio resistente é dado pelo PVI:

$$
\begin{cases}
{}^{CF}D^{\alpha} v(t) + \dfrac{k}{m} v(t) = g, \quad t \geq 0 \\
v(0) = v_0 \in \mathbb{R}
\end{cases}
\tag{15}
$$

Mostre que a solução deste problema de valor inicial é:

$$
v(t) = v_0 \exp(-\beta t) + \frac{mg}{k}[1 - \exp(-\beta t)] \quad \text{sendo} \quad \beta = \frac{\alpha k}{m + (1-\alpha)k}
$$

Resolução: De fato, inicialmente note que $\lambda = k/m$ e que $g(t)$ é uma função constante. Da expressão (12), temos:

$$
\beta = \frac{\alpha k/m}{1 + (1-\alpha)k/m} = \frac{\alpha k}{m + (1-\alpha)k}
$$

Assim, segue da expressão (11) que

$$
\begin{aligned}
v(t) &= v_0 \exp(-\beta t) + \frac{1}{1 + (1-\alpha)\dfrac{k}{m}} \exp(-\beta t) * (\alpha g) \\
&= v_0 \exp(-\beta t) + \frac{mg}{k} \beta \int_0^t \exp(-\beta\tau) d\tau = v_0 \exp(-\beta t) + \frac{mg}{k}[1 - \exp(-\beta t)] \cdot
\end{aligned}
$$

Note que se $\alpha \to 1$, $\beta \to k/m$, de modo que $v(t) \to v_0 e^{-kt/m} + \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})$ o qual é a solução clássica do PVI: $v' + kv/m = g$ com $v(0) = v_0$. Além disso, em [5], os autores demonstram que este PVI possui uma única solução sem exibí-la. Para a figura 1 foram utilizados $k = 10\ kg/s$, $m = 2\ kg$ e $v_0 = 10\ m/s$.

5 Conclusão

Neste trabalho desenvolvemos um método analítico para resolver uma classe de equações diferenciais fracionárias linear de primeira ordem não-homogêneo com operador fracionário de Caputo-Fabrizio. Com esta abordagem, obtemos as soluções sem necessidade de calcular as transformadas diretas e inversas de Laplace, o que é uma tarefa árdua quando trata-se das equações de coeficientes variáveis.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0338

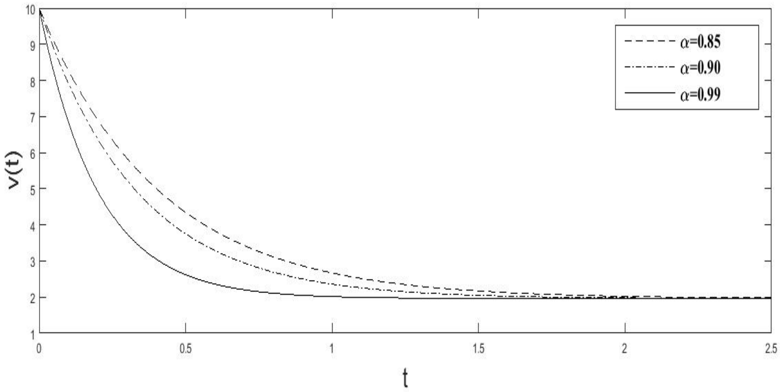

Figura 1: Velocidade de um corpo em queda livre com resistência do ar.

Agradecimentos

Agradecemos a Universidade do Estado de Mato Grosso pelo apoio e aos revisores pelas valiosas sugestões.

Referências

[1] A. Alsaedi, J. J. Nieto and V. Venktesh, Fractional Electrical Circuits, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 7(12), 1-7, 2015. DOI:10.1177/1687814015618127.

[2] M. Caputo and M. Fabrízio, A New Definition of Fractional Derivative Without Singular Kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 1:2, 1-13, 2015. DOI:10.12785/pfda/010201.

[3] A. Giusti and I. Colombaro. Prabhakar-like fractional viscoelasticity, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 56, 138–143, 2018. DOI:10.1016/j.cnsns.2017.08.002.

[4] D. Kumar, J. Singh, M. A. Qurashi and D. Baleanu, Analysis of logistic equation pertaining to a new fractional derivative with non-singular kernel, *Advances in Mechanical Engineering*, 9, 2, 2017. DOI: 10.1177/1687814017690069.

[5] J. Losada, J. J. Nieto. Properties of a New Fractional Derivative Without Singular Kernel, *Progr. Fract. Differ. Appl.* 1:2, 87-92, 2015. DOI: 10.12785/pfda/010202.

[6] R. Metzler. Relaxation in filled polymers: A fractional calculus approach, *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 103, Issue 16, 1995. DOI:10.1063/1.470346.

[7] M. D. Ortigueira, J. A. T. Machado. What is a Fractional Derivative?, *Journal of Computations Physics*, 2014. DOI: 10.1016/j.jcp.2014.07.019.

[8] M. D. Ortigueira, and J. A. T. Machado. A critical analysis of the Caputo-Fabrizio operator, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 59, 608-611, 2018. DOI:10.1016/j.cnsns.2017.12.001.

[9] A. A. Tateishi, H. V. Ribeiro and E. K. Lenzi, The Role of Fractional Time-Derivative Operators on Anomalous Diffusion, *Frontiers in Physics*, 5, 52, 2017. DOI: 10.3389/fphy.2017.00052.

