

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

# Controle MPC com Atrasos e Perdas de Pacotes

Elmer Rolando Llanos Villarreal<sup>1</sup>

Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística, Universidade Federal Rural do Semi-árido, 59625900, Mossoró, RN, Brasil.

Rosana Cibely Batista Rego<sup>2</sup>

Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros Universidade Federal Rural do Semi-árido, RN, Brasil.

Xiankleber Cavalcante Benjamin<sup>3</sup>

Departamento de Engenharia de Computação e Automação Universidade Federal de Rio Grande do Norte, 59078-970, Natal, RN, Brasil.

Andrés Ortiz Salazar<sup>4</sup>

Departamento de Engenharia de Computação e Automação Universidade Federal de Rio Grande do Norte, 59078-970, Natal, RN, Brasil.

Alberto Soto Lock<sup>5</sup>

Departamento de Engenharia Elétrica Universidade Federal Paraiba, 58051-900, João Pessoa, PB, Brasil.

Carlos Ramon Pantaleon Dionisio<sup>6</sup>

Faculdade de Computação Universidade Federal Uberlandia, 38400-902, Uberlandia, MG, Brasil.

**Resumo.** Este artigo estuda o modelo de controle preditivo dos sistemas de controle em rede sem fio, onde podem ocorrer atrasos e perdas indesejáveis induzidas arbitrariamente pelo sistema wifi, em ambos os controles do controlador e controlador para o atuador. É proposto um modelo aumentado, que é especialmente adequado à lei de controle por realimentação de saída, com base em qual proposta de MPC em sistema de controle em rede sem fio é proposta estendendo o anterior para WCS com apenas perdas de pacotes. Mostra-se que a estabilidade proposta é garantida pela estabilidade fechada, satisfazendo as restrições de entrada, de estado e saída.

**Palavras-chave.** Sistema de controle em rede sem fio, Realimentação de saídas, Controle Preditivo.

## 1 Introdução

Este artigo tem como objetivo contribuir para a melhoria da solução do controle de processos com atraso. Dá-se ênfase aos problemas associados ao controle de processos com

---

<sup>1</sup>elmerllanos@ufersa.edu.br

<sup>2</sup>cibely@gmail.com

<sup>3</sup>xiankleber@dca.ufrn.br

<sup>4</sup>andres@dca.ufrn.br

<sup>5</sup>aslock@cear.ufpb.br

<sup>6</sup>carlos.dionisio@ufu.br

atrasos e restrições, quando se utilizam controladores preditivos baseados em modelo. O Controle Preditivo Baseado em Modelo (Model Predictive Control, MPC) refere-se a uma classe de estratégias de controle onde, em cada instante de amostragem, um problema de otimização deve ser resolvido para obter as políticas de controle para a corrente e um período de tempo futuro. A solução ideal é usada para gerar o movimento de controle atual. A escolha do modelo de predição é o ponto chave no MPC: um bom projeto deve buscar obter o melhor modelo possível, que deve ser completo o suficiente para capturar adequadamente a dinâmica do processo e permitir o cálculo das predições da saída do processo, ser intuitivo e ao mesmo tempo permitir uma análise teórica do sistema. As diferentes estratégias de MPC utilizam diferentes formas para representar as relações entre entradas manipuladas, perturbações e saídas do processo. Estimar, a cada instante de tempo discreto, uma predição da saída do processo por exemplo é o horizonte de predição. Esta predição se realiza com base em um modelo do processo, e depende dos valores conhecidos (das entrada e saídas passadas) até o instante tempo  $t$  e dos valores da sequência de incrementos dos sinais de controle futuro. Estabelecer uma trajetória de referência para a saída, sobre o horizonte de predição. Calcular a sequência de ações de controle futuro. Aplicar ao processo apenas o primeiro elemento da sequência de incrementos de ações futuras de controle, desprezando o restante dos valores. As técnicas do controlador MPC são particularmente interessantes para tratar o problema de controle sob restrições. O propósito principal do controlador MPC é aplicar a melhor ação de controle possível minimizando uma determinada função de custo, em [4]. Em [3], um modelo aumentado de ciclo fechado e a abordagem de síntese correspondente ao controlador MPC são dadas para o sistema WNCS com perdas de pacotes limitadas no sensor para controlador (SC) e o controlador para atuador (CA). Este trabalho tem como objetivo generalizar os principais resultados para incorporar atrasos limitados. Para a lei de controle invariante no tempo, [5] combina os atrasos  $SC$  e  $CA$ . No entanto, para a lei de controle MPC atualizada on-line, a abordagem de combinar os atrasos em ambos os sistemas não é favorável. No controlador MPC, uma vez que o controlador deve estimar quando os dados recebidos foram enviados e prever quando o comando de controle que chegará ao atuador, é necessário analisar os atrasos nos dois sistemas, respectivamente. Em [6], um modelo de sistema linear de salto é fornecido com base em cadeias de Markov, onde os atrasos em ambos os sistemas em rede sem fio são considerados respectivamente, mas o controle MPC é arbitrário. Para obter a matriz de realimentação de saídas  $F$  foi usado os artigos de [1] e [7]. O artigo está dividido da seguinte maneira. A Seção 2 estabelece o modelo de  $WNCS$  e o resultado básico de estabilidade, apresenta-se os teoremas para obter a matriz de realimentação de saídas  $F$ . A Seção 3 aborda a abordagem de síntese do  $MPC$  em sistemas em rede sem fio. Finalmente, a seção 4 apresenta algumas observações finais. Notação:  $I$  é a matriz de identidade com dimensão apropriada. Para qualquer vetor  $x$  e a matriz  $W$ ,  $x_W^2 := x^T W x$ .  $x(k+i|k)$  é o valor do vetor  $x$  num tempo futuro  $k+i$  previsto no tempo  $k$ . O símbolo  $*$  é usado para induzir matrizes simétricas. Um valor com o sobrescrito  $*$  corresponde à solução ideal do problema de otimização.

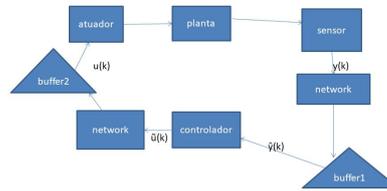


Figura 1: Sistemas de controle em rede sem fio com atrasos

## 2 Modelagem de WNCS com atrasos e perdas de pacote

Conforme ilustrado na Figura 1, a planta é representado pelas equações (1) e (2) a seguir:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), k \geq 0 \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes constantes de dimensões apropriadas;  $u(k) \in R^m$ ,  $x(k) \in R^n$  e  $y(k) \in R^p$  são o controlador o estado da planta e a saída, respectivamente.  $\tilde{u}(k) \in R^m$  e  $\tilde{x} \in R^n$  são o controlador e o estado da planta, respectivamente. Os seguintes pressupostos são válidos neste artigo.

(i) Os dados  $x$  e  $\tilde{u}$  são marcados com o tempo. (ii) O sensor deve ser accionado, isto é, envia  $x(k)$  para a rede em cada instante de amostragem  $k$ . (iii) O controlador é conduzido por eventos, ou seja, na amostra instantânea  $k$ , se e somente se buffer 1 recebe novos dados, então o controlador escolhe os dados com o último período e, se o controlador recebe dados com um aumento de tempo, então ele calcula o movimento de controle. (iv) O atuador é conduzido por eventos, ou seja, no momento de amostragem  $k$ , se o buffer 2 receber novos dados, o atuador escolhe os dados com o último período e, se o atuador receber dados com um aumento de hora, então atualiza a entrada da planta. Para o sistema  $SC$ , são considerados os atrasos induzidos pelo sistema em rede sem fio, distúrbios de pacotes e perdas de pacotes. Assim, os seguintes quatro casos podem acontecer. Não há nenhum pacote chegando no buffer 1. O movimento de controle não é calculado. (ii) Existe um pacote de dados que chega ao buffer 1. Se o tempo-limite desses dados for posterior ao dos dados utilizados anteriormente, esses dados são utilizados pelo controlador para calcular o movimento de controle. (iii) Mais de um pacote de dados chegar ao buffer 1. O controlador escolhe os dados com o último período e executa como no caso (ii). (iv) Existe um pacote de dados que chega ao buffer 1. Se o tempo desses dados for normal ao dos dados utilizados anteriormente, esses dados não são utilizados pelo controlador para calcular o movimento de controle.

**Definição 2.1.** [2] O processo de atraso limitado é definido como  $\{\rho_{sc}(j_l) := j_l - k_{j_l} | j_l \in \Gamma_0\}$ ,  $\{\rho_{ca}(i_l) := i_l \in \Gamma_0\}$  onde  $P_{sc}(j_l)$  e  $P_{ca}(i_l)$  tomam valores nos conjuntos finitos  $\mathfrak{S}_1 :=$

$\{0, 1, \dots, \tau_1\}$  e  $\mathfrak{S}_2 := \{0, 1, \dots, \tau_2\}$ , respectivamente.

**Definição 2.2.** [2] O processo de intervalo intermitente limitado é definido como  $\{\eta_{s-c}(j_l) := j_{l+1} - j_l | j_l, j_{l+1} \in \Gamma_0\}$ ,  $\eta_{sc}(j_l) := i_{l+1} - i_l | i_l, i_{l+1} \in \Gamma_0\}$  onde  $\eta_{sc}(j_l)$  e  $\eta_{c-a}(i_l)$  tomam valores nos conjuntos finitos  $M_1 := \{1, 2, \dots, d_1 + \tau_1\}$  e  $M_2 := \{1, 2, \dots, d_2 + \tau_2\}$ , respectivamente.

## 2.1 Sequências de tempo em sistema em malha fechada

Com base nas análises acima, são encontradas as sequências de dados que são utilizadas pelo controlador e a planta, respectivamente. No entanto, alguns dados correspondentes às duas sequências podem não afetar o sistema em malha fechada. Há duas razões para isso. Primeiro, se  $\{u(i_l), u(i_{l+1}), \dots, u(i_{l+c})\}$  são os mesmos que  $\tilde{u}$  calculou-se (então  $\tilde{u}(\zeta_{i_l}), \tilde{u}(\zeta_{i_{l+1}}), \dots, \tilde{u}(\zeta_{i_{l+c}})$  não afetam o sistema em malha fechada. Em segundo lugar, se  $\tilde{u}(j_s)$  é descartado ou perdido, então  $\tilde{x}(j_s)$  não afeta o sistema em malha fechada. Vamos definir  $I := \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$  e  $J := \{j_1, j_2, j_3, \dots\}$  para que  $\tilde{u}(\eta_{i_n})$  e  $\tilde{x}(j_n)$  ( $n \geq 1$ ) representem completamente os dados que afetam o sistema em malha fechada. Sejam  $I$  e  $J$  que satisfazem

a)  $I \subseteq \{i_1, i_2, i_3\}$ ,  $J \subseteq \{j_1, j_2, j_3\}$ ;

b) para qualquer número inteiro  $c > 0$ , se e somente se  $\zeta_{i_{c+l}} \neq \zeta_{i_c}$  então  $i_{c+l} \in I$ . Especialmente,  $i_{c+l} \in I$ ;

c)  $j_s \in I_0$  se somente existe  $l \geq 1$  tal que  $\zeta_{i_l} = j_s$  então  $i_{c+l} \in I$ . Especialmente,  $i_{c+l} \in I$ ;

É mostrado que  $\{j_r, i_r\}$  é um par que satisfaz  $j_r = \zeta_{i_r}$  e  $j_r \leq i_r$  para todo  $r \geq 1$ .

**Proposição 2.1.** Considerando o tempo  $t$  onde  $I_t$  é a sequência de tempo

$I_0 := \{i_1, i_2, i_3, \dots\}$ , onde  $i_l$  ( $l \geq 1$ ) é o ponto de tempo quando o atuador atualiza o controle para a planta, são apresentadas nas equações (3)–(6) a seguir para os atrasos limitados e as perdas de pacotes conforme definido nas definições (2.1)–(2.2),

$$j_r - k_{j_r} \in \mathfrak{S}_1 \tag{3}$$

$$i_r - j_r + 1 \in M_2 \tag{4}$$

$$i_r - k_{j_r} + 1 \in \tau_3 \tag{5}$$

$$i_{r+1} - i_r, i_{r+1} - j_r, i_r - k_{j_r} \in M_3 \tag{6}$$

onde  $\tau_3 := \{1, 2, \dots, \tau_1 + \tau_2 + d_2\}$  e  $M_3 := \{1, 2, \dots, \tau_1 + \tau_2 + d_2 - 1\}$ .

O Teorema a seguir estabelece a existência de uma lei de controle do tipo realimentação estática de saídas  $u = Fy$  que estabiliza o sistema em malha fechada. O referido teorema foi adaptado em tempo discreto. A aplicação do Teorema a seguir é aplicado em uma região circular de raio unitário, denotada por  $\mathcal{C}^s = \{\lambda \in \mathcal{C}; |\lambda| < 1\}$ , que corresponde à estabilidade no caso de sistemas discretos no tempo. Neste teorema se mostra a existência de uma matriz por realimentação de saídas  $F$  que satisfaz as equações de Sylvester e condição de estabilidade expressas nas equações (7), (8), (9), (10) e (11).

**Teorema 2.1.** [1] *Existe uma matriz de realimentação de saídas  $F : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  tal que  $\sigma(A + BFC) \in \mathcal{C}^s$ , se e somente se as seguintes condições são verificadas para algumas matrizes ( $V \in \mathbb{R}^{n \times v}$ ,  $H_V \in \mathbb{R}^{v \times v}$ ,  $W \in \mathbb{R}^{m \times v}$ ), ( $T \in \mathbb{R}^{n-v \times n}$ ,  $H_T \in \mathbb{R}^{n-v \times n-v}$ ,  $U \in \mathbb{R}^{n-v \times v}$ ) e para algum escalar positivo  $v \leq n$ :*

$$AV - VH_V = -BW, \text{ com } \sigma(H_V) \in \mathcal{C}^s \tag{7}$$

$$TA - H_T T = -UC, \text{ com } \sigma(H_T) \in \mathcal{C}^s \tag{8}$$

$$TV = 0 \tag{9}$$

$$\text{Ker}(CV) \subseteq \text{Ker}(W) \tag{10}$$

$$\text{Ker}(B'T') \subseteq \text{Ker}(U') \tag{11}$$

onde:  $\text{posto}(V) = v$  e  $\text{posto}(T) = n - v$ .  $\square$

## 2.2 Modelo em malha fechada no WNCS e resultados

Seja o sistema representado pelas equações (1) e (2) com a lei de controle por realimentação de saídas dado no Teorema (2.1) onde se mostra a existência da matriz por realimentação de saídas dado através da equação (12)

$$u = Ky = FCx \tag{12}$$

Suponha a lei de controle  $\tilde{u} = K\tilde{y} = FC\tilde{x}$  onde  $K = FC$  é projetado. Em cada  $j_l$ , o controlador calcula  $\tilde{u}(j_l)$ . Para  $j_l \leq K_{j_{l+1}}$ ,  $\tilde{u}(k) = \tilde{u}(j_l)$  é enviado para a rede. Assim o controlador  $\tilde{u}(j_l)$  pode ser ou não ser aplicado na planta, da qual o controlador não conhece a priori. Considerando a entrada de controle  $u(i_r) = K\tilde{y}(j_r) = Ky(k_{j_r}) = FCx(k_{j_r})$  e as definições de  $I$  e  $J$  o sistema em malha fechada para todos os  $k \geq i_1$  torna-se expresso na equação (13) a seguir:

$$x(k+1) = A^{k-i_r+l}x(i_r) + B_{k-i_r+l}FCx(k_{j_r}), \tag{13}$$

$$i_r \leq k \leq i_{r+l}$$

onde  $B_j = \sum_{s=0}^{j-1} A^s B$  para qualquer número inteiro  $j > 0$ .

De acordo com a Proposição (2.1), um número de modelos determinísticos diferentes  $d_1(\tau_1 + \tau_2 + d_2) + \frac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2 + d_2)(\tau_1 + \tau_2 + d_2 - 1)$  podem ser desenhados de (13). Semelhante a [3], [2], defini-se  $z(k) = [x(k)^T x(k_l)^T x(k-2)^T \dots x(k - \tau_1 - \tau_2 - d_2 + l)^T]^T$  e levando em consideração todos os modelos determinísticos, (13) pode ser re-escrito como o seguinte modelo com o estado aumentado  $z(i_r)$  expressado na equação (14) a seguir:

$$z(i_r) = \Phi(i_r)z(i_r), \Phi(i_r) = \sum_{p \in \tau} \sum_{t \in \tau_3} \omega_p(i_r) \lambda_t(i_r) \Phi_{pt},$$

$$\omega_p(i_r) = \begin{cases} 1, & i_{r+1} - i_r = p \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases}$$

$$\lambda_t(i_r) = \begin{cases} 1, & i_r - kj_r + 1 = t \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases} \tag{14}$$

onde  $\tau(t) = \{1, 2, \dots, \tau_1 + d_1 + \tau_2 + d_2 - t\}$ ,  $\Phi_{pt} \in R^{(\tau_1 + \tau_2 + d_2)n \times (\tau_1 + \tau_2 + d_2)n}$ ,  $\Phi_{pt} = \begin{bmatrix} \phi_{pt} \\ I & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\phi_{pt} \in R^{(\min\{\tau_1 + \tau_2 + d_2, p\}n) \times (\tau_1 + \tau_2 + d_2)n}$ ,  $\phi_{pt} = [\phi_{pt}^1 \phi_{pt}^2 \dots \phi_{pt}^{\tau_1 + \tau_2 + d_2}]$ ,  $\phi_{pt}^s \in R^{(\min\{\tau_1 + \tau_2 + d_2, p\}n) \times n}$ ,  $s \in \tau$ ;  $\phi_{pt}^s = 0, s \neq 1$  e

$$\Phi_{pt}^1 = \begin{bmatrix} A^p + B_p FC \\ A^{p-1} + B_{p-1} FC \\ \vdots \\ A^{max\{1, p - \tau_1 - \tau_2 - d_2 + 1\}} + B_{max\{1, p - \tau_1 - \tau_2 - d_2 + 1\}} FC \end{bmatrix}^T$$

para  $t \neq 1$ ,  $\phi_{pt}^s = 0, s \neq \{1, t\}$  e

$$[\phi_{pt}^1 \ \phi_{pt}^t] = \begin{bmatrix} A^p & B_p FC \\ A^{p-1} & B_{p-1} FC \\ \vdots & \vdots \\ A^{max\{1, p - \tau_1 - \tau_2 - d_2 + 1\}} & B_{max\{1, p - \tau_1 - \tau_2 - d_2 + 1\}} FC \end{bmatrix}$$

Mostra-se que a análise da estabilidade de (14) é equivalente à equação (13). Uma vez que este artigo e [2] introduzem a técnica de espaço aumentado para estudar WNCS, No modelo WNCS (14) será usado o controle por realimentação de saídas  $F$  obtido no Teorema (2.1) . Ao generalizar "Observação 8" em [3], é fácil mostrar que, o sistema de malha fechada (14) é assintoticamente estável se existirem matrizes positivas definidas  $P_{pt}$  expressa na equação (15), de modo que

$$\Phi_{pt}^T P_{hl} \Phi_{pt} - P_{pt} < 0, t, l \in \tau_3, p \in \tau(t), h \in \tau_l. \tag{15}$$

Para reduzir a carga computacional, seja  $P_{pt} = P$  para todos  $t \in \tau_3$  e todos  $p \in \tau(t)$ . Denota-se  $Q = P^{-1}$

$$G_{pt} = \begin{bmatrix} G_{pt}^{11} & G_{pt}^{12} & \dots & G_{pt}^{1, \tau_1 + \tau_2 + d_2} \\ G_{pt}^{21} & G_{pt}^{22} & \dots & G_{pt}^{2, \tau_1 + \tau_2 + d_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{pt}^{\tau_1 + \tau_2 + d_2, 1} & G_{pt}^{\tau_1 + \tau_2 + d_2, 2} & \dots & G_{pt}^{\tau_1 + \tau_2 + d_2, \tau_1 + \tau_2 + d_2} \end{bmatrix}$$

$G_{pt}^{t,s} = G, s \in \tau_3$  onde cada bloco em  $G_{pt}$  é da mesma dimensão. Então, a realimentação de saídas foi projetado em termos de um conjunto de LMIs.

**Teorema 2.2.** *Considere o sistema (1), (2) onde os atrasos delimitados e as perdas de pacotes que ocorrem como nas definições (2.1)–(2.2). Então existe um controlador de realimentação de saídas  $u = Ky = FCx$ , onde  $F$  é obtido baseado no teorema (2.1) de modo que o sistema de malha fechada (13) seja assintoticamente estável, se houver matrizes  $Y, G_{pt}$  e  $Q$  expressas na (16) tais que:*

$$A_{pt} = \begin{bmatrix} G_{pt}^T + G_{pt} - Q & * \\ \phi_{pt} G_{pt} & Q \end{bmatrix} > 0, t \in \tau_3, p \in \tau(t) \tag{16}$$

onde  $KG = FCG$  em  $\Phi_{pt} G_{pt}$  satisfaz  $Y$ . Neste caso o ganho por realimentação de saídas é dado por  $K = FC = YG^{-1}$ .

### 3 Aplicação de síntese do controle preditivo

Uma das maiores vantagens do controle MPC é considerar explicitamente as restrições físicas. As restrições de entrada e expressa na equação (17) considerados neste artigo são:

$$\begin{aligned} -\bar{u} &\leq u(i_1 + h) \leq \bar{u} \\ -\bar{\Phi} &\leq \Phi x(i_1 + h + l) \leq \bar{\Phi}, \forall h \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $\bar{u} := [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]^T$ ,  $\bar{u}_j > 0$ ,  $j \in m := \{1, 2, \dots, m\}$ ;  $\bar{\Phi} := [\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \dots, \bar{\phi}_q]^T$ ,  $\bar{\phi}_s > 0$ ,  $j \in q := \{1, 2, \dots, q\}$ ;  $\Phi \in R^{q \times n}$ . Portanto, o objetivo é projetar um controlador MPC em sistema em rede sem fio que estabilize o sistema (14), ao mesmo tempo que satisfaça (17).

### 4 Conclusões

No presente artigo foi considerada uma abordagem típica do controlador MPC. Este artigo generalizou principais resultados para incorporar atrasos limitados. O atraso induzido pela rede é conhecido como uma fonte potencial de degradação do desempenho e até mesmo causando instabilidade. Ao analisar os efeitos dos atrasos e das perdas de pacotes, nos sistemas *SC* e *CA*, respectivamente, no sistema de circuito fechado, é estabelecido um modelo inovador que pode ser usado para lidar com o problema da lei de controle atualizado em WNCS. É apresentado como obter uma matriz de realimentação de saídas.

### Referências

- [1] E. B. Castelan, J. C. Hennet, E. R. Ll. Villarreal, Quadratic Characterization and Use of Output Stabilizable Subspaces, *IEEE Trans. Automatic Control*, 48(4):654–660, 2003. DOI : 10.1109/TAC.2003.809774
- [2] B. Ding and X. Tang and H. Pan and T. Zou, "On MPC of Linear System Over Networks with Bounded Delays and Packet Losses, *Proceeding of the 11<sup>th</sup> World Congress on Intelligent Control and Automation Shenyang*, vol1, China, 2014. DOI : 10.1109/WCICA.2014.7053140
- [3] B. Ding, Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss and its use in model predictive control, *Automatica*, 47:2526–2533, 2011.
- [4] C. B. S. Dutra, Controle Preditivo Multiobjetivo para processos em atraso, Tese doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2003.
- [5] H. Gao, T. Chen, and J. Lam, A new delay system approach to network-based control, *Automatica*, 44:39–52, 2008. DOI : 10.1016/j.automatica.2007.04.020
- [6] Y. Shi and B. Yu, "Robust mixed  $H_2/H_\infty$  control of networked control systems with random time delays in both forward and backward communication links, *Automatica*, 47:754–760, 2011. DOI : 10.1016/j.automatica.2011.01.022
- [7] E. R. Ll. Villarreal, J. A. R. Vargas, E. M. Hemerly, Static Output Feedback stabilization using Invariant Subspaces and Sylvester Equations, *TEMA - Tend. Mat. Apl. Comput.*, 10(1):99–110, 2009. DOI : 10.5540/tema.2009.010.01.0099