

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Equações Diferenciais Fracionárias em Engenharia

Rodrigo Ribeiro Bertolotto¹

Departamento de Engenharia Civil, UNESP, Bauru, SP

Rubens de Figueiredo Camargo²

Departamento de Matemática, UNESP, Bauru, SP.

Resumo. A modelagem matemática via equações diferenciais tem um papel de enorme destaque, visto que tal técnica vem sendo utilizada para modelar fenômenos desde o século XVII.

Um fenômeno, quando descrito em termos de símbolos e relações matemáticas, que de certa forma podem reproduzir ou transcrever o objeto estudado, é dito por Modelo Matemático. No entanto para se chegar a um Modelo Matemático, é necessária muita análise e estudo para se chegar a uma melhor aproximação da realidade. Depende-se das variáveis selecionadas e dos recursos disponíveis. Esse processo é denominado de Modelagem Matemática.

A Modelagem Matemática é visto como o processo em que se transformam os problemas e eventos reais, em problemas matemáticos e resolvem os interpretando seus resultados no âmbito real. Tal problema matemático pode ser uma equação diferencial (ED), um sistema de equações não lineares, uma equação integral e assim por diante.

Uma equação diferencial é obtida quando se observa um fenômeno, coletam-se taxas de variação e então se relacionam a com a própria função que descreve tal fenômeno.

A principal motivação para se estudar métodos para resolver equações diferenciais é buscar entender o processo físico que se acredita ser inerente à equação estudada. A importância das equações diferenciais é que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como, por exemplo, sistemas massa-mola, deflexão em vigas. A construção, bem como a compreensão, de um processo complexo é alcançada, em geral, através da compreensão de modelos mais elementares. Desta forma, o conhecimento profundo e detalhado destes modelos mais básicos é o primeiro, e fundamental passo, para se estudar problemas mais complexos e detalhistas.

Outro fator importante é que dentre as diferentes formas de se buscar a solução de uma equação diferencial ordinária ou parcial a conhecida metodologia das transformadas integrais tem um papel de destaque. A referida metodologia consiste em aplicar uma determinada transformada integral ou a justaposição de transformadas integrais em um determinado problema, o que nos conduz a um problema cuja solução pode ser obtida de forma mais simples. Resolve-se o problema transformado e recupera-se a solução através das transformadas inversas. Ou seja, transfere-se a dificuldade do problema de partida para o cálculo da transformada inversa.

O objetivo geral deste projeto foi um estudo sistemático da modelagem matemática aplicada à engenharia, detalhando sua aplicabilidade, complexidade e formas de se resolver as equações diferenciais obtidas a partir da modelagem. Como também maneiras de se aproximar ainda mais do modelo real por meio da utilização do cálculo fracionário. O foco maior da pesquisa foi realizar um estudo detalhado das transformadas integrais de Laplace, suas principais propriedades, teoremas de convolução e aplicações, devido a sua importância na resolução de equações diferenciais [2]. Como também o estudo do cálculo de ordem não inteira como uma ferramenta para se refinar a descrição dada por equações de ordem inteira [1], sobretudo na engenharia.

¹ rodrigob_100@hotmail.com

² rubens@fc.unesp.br

2

De forma mais clara esse trabalho de iniciação científica foi subdividido em 2 etapas. Na primeira etapa foi feito o estudo das transformadas integrais e na segunda parte foi dado foco ao cálculo de ordem não inteira e suas aplicações.

Na primeira parte, o foco foi descrever fenômenos a partir de suas taxas de variação. Ou seja, modelagem matemática a partir de equações diferenciais e seus diferentes métodos de solução. Trabalhar um desenvolvimento sistemático da teoria envolvendo a transformada integral de Laplace, definição, propriedade, teoremas e aplicações. Além de estudar a metodologia das transformadas integrais como ferramenta para resolução de equações diferenciais. Não deixando de fora do estudo, as principais funções especiais relacionadas ao cálculo fracionário [1]. No caso a Função Gama e as funções de Mittag-Leffler.

Na segunda parte, o estudo foi direcionado ao cálculo fracionário, definindo o operador integral de ordem inteira, n , e então utilizando a convolução de Laplace para definir o operador integral de ordem não inteira, α . Definiu-se a derivada fracionária como sendo o operador inverso, à esquerda, do operador integral fracionário. Calculou-se a integral e a derivada fracionária de funções elementares, verificando que o caso inteiro é um caso particular do resultado fracionário. Definiu-se também as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo e depois calculou-se suas respectivas transformadas de Laplace. Justificando a adoção da derivada de Caputo. Foi feito também o estudo e a modelagem de fenômenos utilizando equações diferenciais de ordem fracionária.

Já ao final, concluindo o projeto, resolveu-se as versões fracionárias de equações diferenciais associadas a problemas específicos da engenharia civil, como vibrações e deflexão em vigas causadas por seu próprio peso e solicitações externas. Fenômenos de extrema importância para a área de estruturas na Engenharia Civil. Tais resultados foram comparados com as soluções clássicas utilizadas atualmente. Além disso, buscou-se o valor da ordem da derivada que torna a descrição do problema mais precisa.

Vale ressaltar a importância desse trabalho de iniciação científica, destacando a enorme aplicabilidade das equações diferenciais, de ordem inteira e não inteira, em problemas de engenharia. Além disso, o cálculo fracionário tem sido objeto de vários trabalhos na literatura, por oferecer, em inúmeros problemas, uma descrição mais precisa de fenômenos naturais.

Após realizar todas as etapas do projeto em questão pode-se dizer que os objetivos foram atingidos e que os resultados foram satisfatórios. A partir dos estudos feitos, foi possível aplicar as derivadas de ordem não inteiras para a modelagem dos fenômenos na engenharia civil e posteriormente resolver as equações diferenciais por meio das transformadas integrais, em especial a transformada de Laplace. Tais resultados obtidos com tais procedimentos foram comparados com os métodos clássicos, e constatou-se aproximações precisas para tais fenômenos.

Conclui-se que de fato o estudo das equações diferenciais de ordem não inteira é de extrema importância para se compreender fenômenos.

Palavras-chave. Cálculo Fracionário, Engenharia, Matemática Aplicada, Transformada Integral

Agradecimentos

RRB agradece à FAPESP (processo 2014/24743-5) e RFC agradece ao CNPq (Projeto Universal – Processo: 455920/2014-1) por terem financiado esta pesquisa.

Referências

- [1] R. F. Camargo, Cálculo Fracionário e Aplicações, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, (2009).
- [2] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, San Diego (1999).